Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 1 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2012GK

Aufgabe a (1)

1. SCHRITT: $f'(0)$ UND $f'(140)$ BERECHNEN

$f'(x) = \frac{1}{60}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}$

$f'(0) = \frac{1}{60}e^{0} - \frac{1}{600}$ $\quad$ $f'(140) = \frac{1}{60}e^{-7} - \frac{1}{600}$

$f'(0) = 0{,}015$ $\quad$ $f'140 \approx -0{,}00165$

2. SCHRITT: MONOTONIEVERHALTEN ERMITTELN

Die Abbildung lässt vermuten, dass die Funktion streng monoton fallend ist. Um das nachzuweisen, musst du zeigen, dass die Ableitung von f', also f'' negativ ist.

$f''(t) = -\frac{1}{1200}e^{-\frac{1}{20}t} < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die Funktion ist tatsächlich streng monoton fallend.

3. SCHRITT: FUNKTIONSWERT VON $20ln10$ BESTIMMEN

$$\begin{aligned}\frac{1}{60}e^{-\frac{1}{20}\cdot 20\cdot ln10} - \frac{1}{600} &= \frac{1}{60}e^{-ln10} - \frac{1}{600}\\ &= \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{e^{ln10}} - \frac{1}{600}\\ &= \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{10} - \frac{1}{600}\\ &= 0\end{aligned}$$

4. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Du hast eben gezeigt, dass die Funktion bei $t_0 = 20ln10$ eine Nullstelle hat und dass sie streng monoton fällt. Das heißt, es kann keine weitere Nullstelle geben.

Alternatie Lösung:

Du kannst natürlich auch den Funktionsterm = 0 setzen, die Gleichung lösen und zeigen, dass $20ln10$ die einzige Lösung ist.

Aufgabe a (2)

Im Intervall $[0; 20ln10[$ ist $f'(t)$ positiv und fallend. Die Alkoholkonzentration nimmt zu, allerdings nimmt sie in gleichen Zeitintervallen um immer weniger Einheiten zu, bis die Zunahme zum Zeitpunkt $t_0 = 20ln10$, also nach etwa 46 Minuten, ganz zum Stillstand kommt. Von diesem Moment an ist der Funktionsgraph unterhalb der x-Achse, die Alkoholkonzentration nimmt ab und zwar bis zum Zeitpunkt $t_1 = 140$ in immer gleichen Zeitintervallen um immer mehr Einheiten.

Aufgabe b (1)

1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Wenn die Funktion $f(t)$ die Blutalkoholkonzentration abbilden soll, dann muss sie eine Stammfunktion der Funktion $f'(t)$ sein. Du hast zwei Möglichkeiten: Du kannst $f'(t)$ hochleiten und mit $f(t)$ vergleichen oder, was die einfachere Möglichkeit ist, die Funktion $f(t)$ ableiten und mit $f'(t)$ vergleichen. Da bei der Ableitung konstante Glieder verschwinden, musst du noch zeigen, dass der Summand $+\frac{1}{3}$ genau zu der Stammfunktion gehört, die die Blutalkoholkonzentration abbildet. Du weißt, dass die Versuchsperson zum Zeitpunkt $t = 0$ keinen Alkohol im Blut hatte. Also muss $f(0) = 0$ sein.

2. SCHRITT: DIE ABLEITUNG DER FUNKTION BESTIMMEN

$$f(t) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}t + \frac{1}{3}$$
$$f'(t) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{20}t} \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) - \frac{1}{600}$$
$$f'(t) = \frac{1}{60}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}$$

3. SCHRITT: FUNKTIONSWERT ZUM ZEITPUNKT $t = 0$ BERECHNEN

$$f(0) = -\frac{1}{3}e^{0} + \frac{1}{3} = 0$$

Damit ist gezeigt, dass $f(t)$ die Blutalkoholkonzentration während der ersten 140 Minuten nach der Einnahme beschreibt.

Aufgabe b (2)

1. SCHRITT: BEDINGUNGEN FÜR HOCHPUNKTE

Für Hochpunkte einer Funktion gilt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$.
Die Nullstelle der Ableitung ist mit $20ln10$ schon gegeben. Außerdem weißt du, dass $f'(t)$ streng monoton fällt, alle Werte der zweiten Ableitung demnach negativ sind.

2. SCHRITT: FUNKTIONSWERT DES HOCHPUNKTES BESTIMMEN

$$f(20ln10) = -\frac{1}{3}e^{-ln10} - \frac{1}{600} \cdot 20ln10 + \frac{1}{3}$$
$$f(20ln10) \approx 0{,}223 \text{ ‰}$$

Aufgabe b (3)

$$\begin{aligned} f(140) &= -\frac{1}{3}e^{-7} - \frac{140}{600} + \frac{1}{3} \\ &\approx 0{,}1 \text{ ‰} \end{aligned}$$

Aufgabe c (1)

$$\begin{aligned} 1{,}01357 \cdot e^{-0{,}01657t} &< 0{,}01 && |:1{,}01357 \\ e^{-0{,}01657t} &< 0{,}009866 \\ -0{,}01657t &< ln0{,}009866 && |:-0{,}01657 \\ t &> 278{,}74 \end{aligned}$$

Nach rund 279 Minuten ist der Alkoholwert unter 0,01 ‰ gesunken.

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: ANFORDERUNGEN AN DIE FUNKTION

Da es im Modell um den Abbau von Blutalkohol geht, sollten die Funktionswerte mit zunehmender Zeit gegen 0 gehen und auf keinen Fall negativ werden. Also schaust du dir die Entwicklung der Funktionswerte für große *t* an.

2. SCHRITT: GRENZWERTE DER FUNKTIONEN *F* UND *H* FÜR $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600}t + \frac{1}{3}\right) = -\infty$$

Irgendwann werden die Funktionswerte negativ, weshalb sich die Funktion *f* nur für eine begrenzte Zeit für das Modell eignet.

$$\lim_{t\to\infty}(1{,}01357e^{-0{,}01657t}) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1{,}01357}{e^{0{,}01657t}}\right) = \frac{1{,}01357}{\infty} = 0$$

Die Funktionswerte der Funktion *h* werden nie negativ und streben für große t gegen 0, was für $t > 140$ besser zum Modell passt.

Aufgabe c (3)

1. SCHRITT: EIGENSCHAFTEN DER ABLEITUNGSFUNKTION h'

Im Intervall [0;20ln10[ist $h(t)$ streng monoton steigend, die Ableitungsfunktion ist oberhalb der x-Achse. Im Punkt $t = 20ln10$ hat h ihren Hochpunkt, die Ableitung hat hier eine Nullstelle.
Im Intervall]20ln10;∞[ist h streng monoton fallend, die Ableitungsfunktion ist unterhalb der x-Achse. Da $f''(t)$ stets negativ ist, ist $h(t)$ bis zum Punkt $t = 140$ rechtsgekrümmt. Für $t > 140$ ist $h(t)$ linksgekrümmt. Das heißt, h hat bei $t = 140$ einen Wendepunkt, die Ableitungsfunktion hat an dieser Stelle einen Tiefpunkt. Vom Wendepunkt an ist die Änderungsrate abnehmend negativ, das heißt, der Graph der Ableitungsfunktion $h'(t)$ nähert sich von unten der x-Achse an.

2. SCHRITT: VERGLEICH MIT DER FUNKTION $k'(T)$

Ein Blick auf den Graphen von $k'(t)$ zeigt dir, dass diese Funktion einen Tiefpunkt bei etwa $t = 70$ hat.
Damit ist die Funktion $k'(t)$ zur Modellierung der Änderungsrate der Blutalkoholkonzentration nicht geeignet.