Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 2 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2012GK

Aufgabe a (1)

Generell geht aus den Graphen hervor, dass die Ozonbelastung im ländlichen Raum höher ist als in der Stadt. Zudem steigen die Ozonwerte in der Stadt schneller an, bis sie gegen $16^{\circ\circ}$ Uhr ihren Hochpunkt erreichen, und sinken dann relativ schnell wieder ab, während die Werte der ländlichen Region langsamer ansteigen, gegen $18^{\circ\circ}$ Uhr am höchsten sind und dann sehr viel langsamer als in der Stadt wieder abflauen.
Ab einer bestimmten Konzentration wird der Bevölkerung geraten, körperliche Anstrengung im Freien möglichst zu vermeiden. Sollte dieser Wert beispielsweise bei 180 $\frac{\mu g}{m^3}$ liegen, gälte diese Warnung für die ländliche Region ab etwa $14^{\circ\circ}$ Uhr, während die Stadtbevölkerung nur etwa von $15^{\circ\circ}$ Uhr bis 16^{30} Uhr körperliche Anstrengung im Freien vermeiden sollte.

Aufgabe a (2)

$$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55$$
$$f(0) = 55{,}06\ \frac{\mu g}{m^3}$$
$$f(14) = 76{,}168\ \frac{\mu g}{m^3}$$

Aufgabe a (3)

1. SCHRITT: 1. ABLEITUNG BESTIMMEN

$$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55$$
$$f'(t) = 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t)$$

Auf den Nachweis des Hochpunktes mittels 2. Ableitung kannst du verzichten, da aus der Abbildung hervorgeht, dass sich der Hochpunkt im Intervall]0;14[befinden muss.

2. SCHRITT: ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t) = 0 \Leftrightarrow t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t = 0$

$$\begin{aligned} t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t &= 0 \qquad |t\ ausklammern \\ t(t^2 - 31{,}8t + 202{,}4) &= 0 \\ t_1 &= 0 \end{aligned}$$

$t^2 - 31{,}8t + 202{,}4 = 0$

$$\begin{aligned} t_{2;3} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ t_{2;3} &= 15{,}9 \pm \sqrt{15{,}9^2 - 202{,}4} \\ t_2 &= 8{,}8 \\ t_3 &= 23 \end{aligned}$$

Die Lösungen t_1 und t_3 kommen offensichtlich nicht in Frage. Der t-Wert für den Hochpunkt ist 8,8. Die Ozonkonzentration erreicht ihren höchsten Wert um 15[48] Uhr.

3. SCHRITT: FUNKTIONSWERT DES HOCHPUNKTES BERECHNEN

$f(8{,}8) \approx 181{,}75\ \frac{\mu g}{m^3}$

Aufgabe b (1)

1. SCHRITT: 2. UND 3. ABLEITUNG BESTIMMEN

$$\begin{aligned} f(t) &= 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55 \\ f'(t) &= 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8t^2 + 202{,}4t) \\ f''(t) &= 0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4) \\ f'''(t) &= 0{,}06 \cdot (6t - 63{,}6) \end{aligned}$$

2. SCHRITT: 2. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$0{,}06 \cdot (3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 63{,}6t^2 + 202{,}4 = 0$

$3t^2 - 63{,}6t + 202{,}4 = 0$

$$\begin{aligned} t_{1;2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ t_{1;2} &= \frac{63{,}6 \pm \sqrt{(-63{,}6)^2 - 2428{,}8}}{6} \\ t_1 &= 3{,}9 \\ t_2 &= 17{,}3 \end{aligned}$$

3. SCHRITT: STEIGUNG AN DEN RÄNDERN DER FUNKTION BERÜCKSICHTIGEN

$t_2 = 17{,}3$ liegt nicht im Definitionsbereich. Da der Graph bis zum zweiten Wendepunkt rechtsgekrümmt ist, findest du die stärkste Abnahme der

Ozonkonzentration am rechten Rand der Definitionsmenge also bei $t_2 = 14$. Für den linken Rand des Definitionsbereichs gilt: Der Graph hat an der Stelle $t = 0$ eine waagerechte Tangente (siehe Lösung zu a(3)), dieser Punkt kommt also als Punkt mit der stärksten Zunahme nicht in Frage.

4. SCHRITT: NACHWEIS DES WENDEPUNKTES t_1 MITTELS 3. ABLEITUNG

$$f'''(t) = 0{,}06 \cdot (6t - 63{,}6)$$
$$f'''(3{,}9) = -2{,}376 \neq 0$$

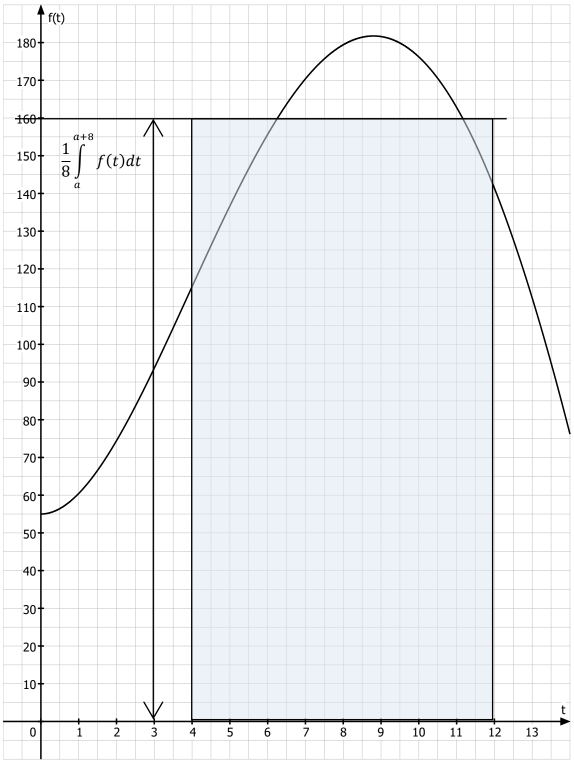
Die stärkste Zunahme erfolgt zum Zeitpunkt $t_1 = 3{,}9$, also um 10^{54} Uhr, die stärkste Abnahme erfolgt zum Zeitpunkt $t_2 = 14$, um $21^{\circ\circ}$ Uhr.

Aufgabe b (2)

1. SCHRITT: DIE BEDEUTUNG DES AUSDRUCKS $\int_a^{a+8} f(t)dt$

Das Integral ist der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graph der Funktion und der x-Achse mit der Breite 8 LE.

2. SCHRITT: DIE BEDEUTUNG DES AUSDRUCKS $\frac{1}{8}\int_a^{a+8} f(t)dt$



Das gefärbte Rechteck mit der Breite 8 und der Höhe $\frac{1}{8}\int_a^{a+8} f(t)dt$ hat den gleichen Flächeninhalt wie das Integral $\int_a^{a+8} f(t)dt$.

Der Ausdruck $\frac{1}{8}\int_a^{a+8} f(t)dt$ kann somit als durchschnittliche Ozonkonzentration eines 8-Stunden-Intervalls des Prognosetages interpretiert werden.

Aufgabe b (3)

1. SCHRITT: $f(T)$ HOCHLEITEN

$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55$

$F(t) = 0{,}06 \cdot \left(\frac{0{,}25}{5}t^5 - \frac{10{,}6}{4}t^4 + \frac{101{,}2}{3}t^3\right) + 55t + c$

$F(t) = 0{,}003t^5 - 0{,}159t^4 + 2{,}024t^3 + 55t + c$

2. SCHRITT: $\frac{1}{8}\int_0^8 f(t)dt$ BERECHNEN

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\int_0^8 f(t)dt &= \frac{1}{8}|0{,}003t^5 - 0{,}159t^4 + 2{,}024t^3 + 55t|_0^8 \\ &= \frac{1}{8}[(0{,}003 \cdot 8^5 - 0{,}159 \cdot 8^4 + 2{,}024 \cdot 8^3 + 55 \cdot 8) - 0] \\ &= 115{,}416\frac{\mu g}{m^3}\end{aligned}$$

Aufgabe b (4)

Du musst die Wertemenge der Funktion beachten. Der Sachzusammenhang lässt keine negativen Werte zu, denn es gibt keine negative Ozonkonzentration. Wenn die Ausdehnung der Definitionsmenge auf das Intervall [0;24] nicht geeignet sein soll, dann ist zu vermuten, dass die Funktionswerte innerhalb dieses Intervalls negativ werden. Du kannst das überprüfen, indem du die Koordinaten des Tiefpunktes berechnest (die x-Werte der Extrempunkte haben wir schon in Aufgabe a(3) berechnet), oder indem du einfach den Funktionswert von $t = 24$ berechnest.

$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55$
$f(24) \approx -263$

Aufgabe c (1)

1. SCHRITT: GEGEBENE WERTE NOTIEREN

$O_m = 0{,}25 \cdot O_h + 5{,}5 \cdot T_m - 40$

Gegeben: $T_m = 28\,°C$ $O_m = 180\frac{\mu g}{m^3}$

Gesucht: O_h

2. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

$$\begin{aligned} 180 &= 0{,}25 \cdot O_h + 5{,}5 \cdot 28 - 40 && |\, zusammenfassen \\ 180 &= 0{,}25 \cdot O_h + 114 && |-114 \\ 0{,}25 \cdot O_h &= 66 && |\cdot 4 \\ O_h &= 264\ \frac{\mu g}{m^3} \end{aligned}$$

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: GEGEBENE WERTE NOTIEREN

$O_m = 0{,}25 \cdot O_h + 5{,}5 \cdot T_m - 40$

Gegeben: $O_m = 240\ \frac{\mu g}{m^3}$; $O_h = 60\ °C$

Gesucht: T_m

2. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

$$\begin{aligned} 0{,}25 \cdot 60 + 5{,}5 \cdot T_m - 40 &= 240 && |+25 \\ 5{,}5 \cdot T_m &= 265 && |:5{,}5 \\ T_m &= 48,\overline{18}\ °C \end{aligned}$$