Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 1, Aufgabe 3 Analysis

Nordrhein-Westfalen 2012GK

Aufgabe a (1)

1. SCHRITT: BEDINGUNG FÜR PUNKTSYMMETRIE

Für Funktionen, deren Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung sind, gilt: $f(-x) = -f(x)$.

2. SCHRITT: RECHNUNG

$-f(x) = -3 \cdot x \cdot e^{-x^2}$
$f(-x) = 3 \cdot (-x) \cdot e^{-(-x)^2} = -3 \cdot x \cdot e^{-x^2} = -f(x)$

Aufgabe a (2)

1. SCHRITT: 1. UND 2. ABLEITUNG BERECHNEN

$f(x) = 3 \cdot x \cdot e^{-x^2}$

$f'(x) = 3 \cdot e^{-x^2} + 3 \cdot x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$f'(x) = 3 \cdot e^{-x^2} - 6x^2 \cdot e^{-x^2}$

$f'(x) = 3 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$f''(x) = 3 \cdot e^{-x^2}(-2x)(1 - 2x^2) + 3 \cdot e^{-x^2} \cdot (-4x)$

$f''(x) = -6x \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2) - 12x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = -6x \cdot e^{-x^2}(3 - 2x^2)$

2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$3 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0$
$x_{1;2} = \pm\sqrt{0{,}5}$

3. SCHRITT: MITTELS 2. ABLEITUNG ART DER EXTREMPUNKTE BESTIMMEN

Wegen der Symmetrie brauchst du nur einen Wert einzusetzen. Art und Lage des 2. Extrempunktes ergeben sich dann aus den

Symmetrieeigenschaften.

$f''(x) = -6x \cdot e^{-x^2}(3 - 2x^2)$
$f''\left(\sqrt{0{,}5}\right) = -6\sqrt{0{,}5} \cdot e^{-0{,}5} \cdot 2 < 0 \Rightarrow Hochpunkt$

4. SCHRITT: FUNKTIONSWERTE DER EXTREMPUNKTE BERECHNEN

$f\left(\sqrt{0{,}5}\right) = 3 \cdot \sqrt{0{,}5} \cdot e^{-0{,}5} \approx 1{,}29$

Damit gilt für die Extrempunkte:

Hochpunkt: $\left(\sqrt{0{,}5}|1{,}29\right)$

Tiefpunkt: $\left(-\sqrt{0{,}5}| -1{,}29\right)$

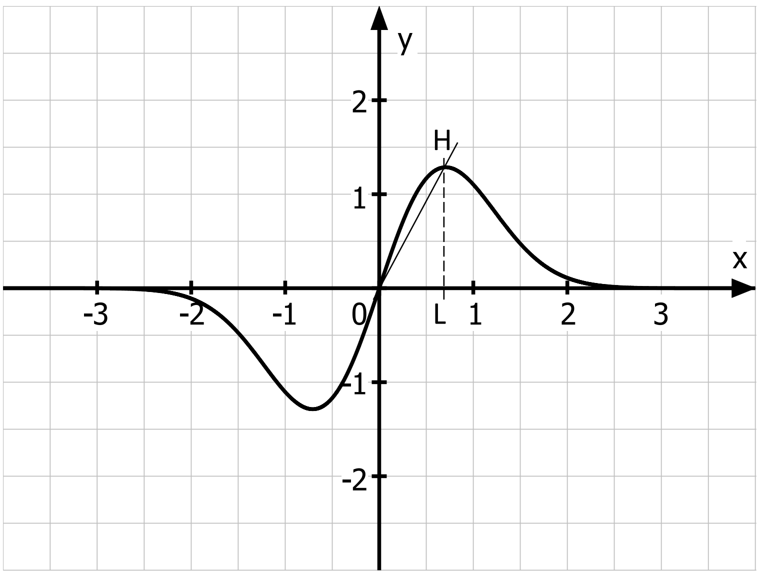
Aufgabe b (1)

Wenn F eine Stammfunktion der Funktion f ist, dann stimmt der Term der Ableitung F' mit dem Funktionsterm von f überein.

$$F(x) = -\frac{3}{2}e^{-x^2}$$
$$F'(x) = -\frac{3}{2}e^{-x^2} \cdot (-2x)$$
$$= 3 \cdot x \cdot e^{-x^2} = f(x)$$

Aufgabe b (2)

1. SCHRITT: SKIZZE



2. SCHRITT: TEILFLÄCHEN BERECHNEN

Die gesuchte Fläche ergibt sich aus der Differenz der Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse (A_1) und der Fläche A_2 des Dreiecks OLH (Skizze).

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{0{,}5}} f(x)dx = \left| -\frac{3}{2}e^{-x^2} \right|_0^{\sqrt{0{,}5}}$$
$$= -\frac{3}{2}e^{-0{,}5} - \left(-\frac{3}{2}e^0\right)$$
$$\approx 0{,}59\ FE$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0{,}5} \cdot 1{,}5 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-0{,}5}$$
$$A_2 \approx 0{,}455\ FE$$

3. SCHRITT: DIFFERENZ BILDEN

$$A = A_1 - A_2$$
$$= 0{,}59 - 0{,}455$$
$$= 0{,}135\ FE$$

Aufgabe c (1)

1. SCHRITT: EIGENSCHAFTEN EINER TANGENTE

Eine Tangente ist eine Gerade, hat also die allgemeine Funktionsgleichung $y = mx + t$, wobei m der Steigung des Graphen von f in den Berührpunkten entspricht. Es gilt also: $m = f'(1)$ bzw. $f'(-1)$. Ein Blick auf den Term der Ableitung $f'(x)$ zeigt dem geübten Auge, dass die Ableitung Achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Demnach haben beide Tangenten die gleiche Steigung.

2. SCHRITT: DIE STEIGUNG DER TANGENTEN BESTIMMEN

$$f'(x) = 3 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$
$$f'(1) = 3 \cdot e^{-1}(1 - 2)$$
$$f'(1) = -\frac{3}{e}$$

3. SCHRITT: FUNKTIONSWERTE DER BERÜHRPUNKTE BERECHNEN

$$f(x) = 3 \cdot x \cdot e^{-x^2}$$

$$f(1) = 3 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} \qquad A\left(1 \middle| \tfrac{3}{e}\right)$$
$$f(-1) = -\frac{3}{e} \qquad B\left(-1 \middle| -\tfrac{3}{e}\right)$$

4. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE MIT DER *Y*-ACHSE BESTIMMEN

$t_A: y = -\frac{3}{e}x + t \wedge A\left(1 \middle| \frac{3}{e}\right) \in t_A \qquad t_B: y = -\frac{3}{e}x + t \wedge B\left(-1 \middle| -\frac{3}{e}\right) \in t_B$

Um t zu berechnen, setzt du die Koordinaten von A bzw. B in die Funktionsgleichungen ein:

$\frac{3}{e} = -\frac{3}{e} + t \Rightarrow t = \frac{6}{e} \qquad -\frac{3}{e} = -\frac{3}{e} \cdot (-1) + t \Rightarrow t = -\frac{6}{e}$

$t_A: y = -\frac{3}{e}x + \frac{6}{e} \qquad t_B: y = -\frac{3}{e}x - \frac{6}{e}$

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE MIT DER *X*-ACHSE

$A_x: -\frac{3}{e}x + \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \qquad A_x(2|0)$

$B_x: -\frac{3}{e}x - \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \qquad B_x(-2|0)$

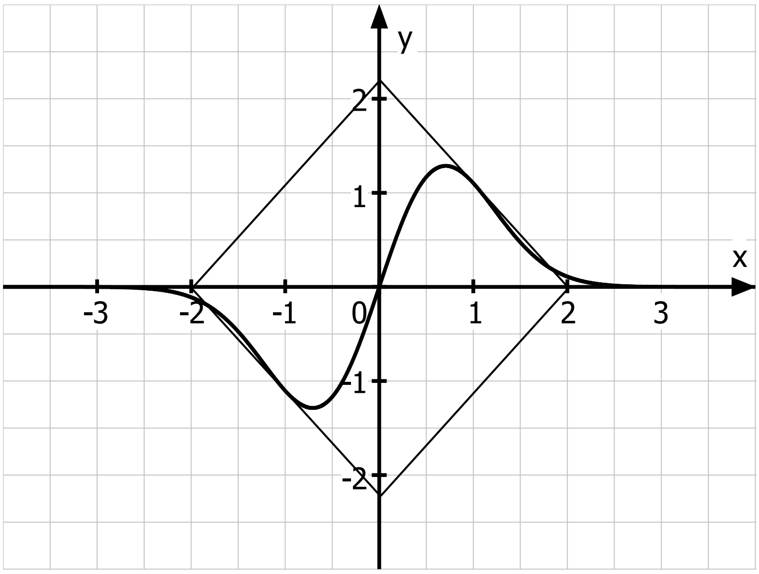
2. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE MIT DER *X*-ACHSE

Die Schnittpunkte mit der y-Achse kannst du direkt ablesen. Sie entsprechen ja dem Parameter t.

$t_A: y = -\frac{3}{e}x + \frac{6}{e} \qquad A_y = \left(0 \middle| \frac{6}{e}\right)$

$t_B: y = -\frac{3}{e}x - \frac{6}{e} \qquad B_y = \left(0 \middle| -\frac{6}{e}\right)$

Aufgabe c (3)



Aufgabe c (4)

1. SCHRITT: EIGENSCHAFTEN EINER RAUTE

Eine Raute ist ein Viereck, das vier gleich lange Seiten hat, von denen je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind. Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß und jede Raute hat mindestens zwei Symmetrieachsen.

Du musst nicht alle Eigenschaften nachweisen, weil die einen die anderen nach sich ziehen. Z.B. würde es genügen, zu zeigen, dass das fragliche Viereck vier gleich lange Seiten hat. Alle anderen Eigenschaften der Raute würden daraus folgen.

2. SCHRITT: RAUTENEIGENSCHAFTEN DES VIERECKS $A_XA_YB_XB_Y$

In dem Viereck $A_xA_yB_xB_y$ sind die Seiten $\overline{A_xA_y}$ und $\overline{B_xB_y}$ parallel. (Das sind die beiden Tangenten mit der gleichen Steigung.) Außerdem sind wegen der Symmetrie beide Seiten gleich lang. Daraus folgt, dass die Seiten $\overline{A_yB_x}$ und $\overline{B_yA_x}$ auch parallel und gleich lang sein müssen. Ergo handelt es sich um eine Raute.

Aufgabe c (5)

1. SCHRITT: FLÄCHENINHALT EINER RAUTE

Für den Flächeninhalt einer Raute gilt:
$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$, wobei e und f die beiden Diagonalen der Raute sind.

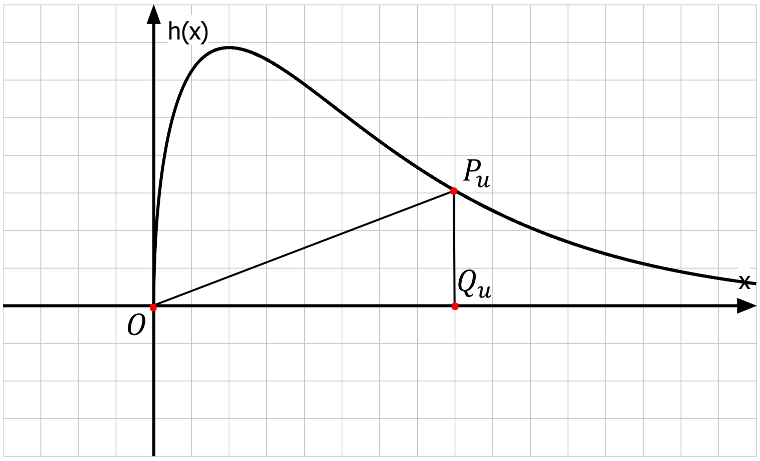
2. SCHRITT: BERECHNUNG DES FLÄCHENINHALTS

$e = \overline{A_yB_y} = 2 \cdot \frac{6}{e}$

$f = \overline{A_xB_x} = 4$

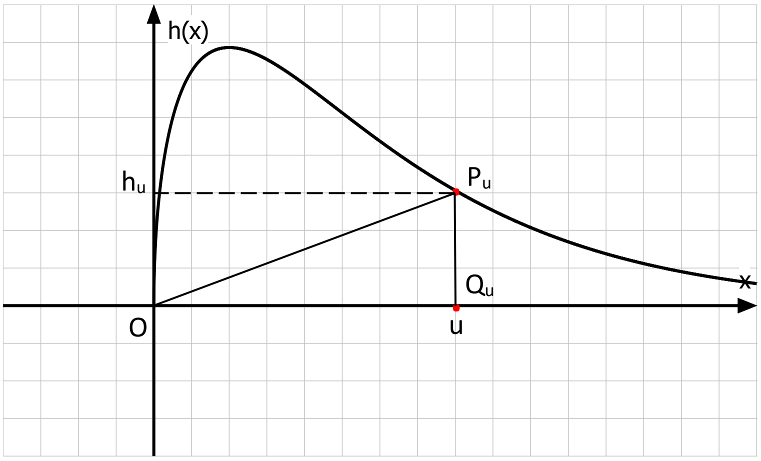
$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{6}{e} \cdot 4 \approx 8{,}83\ FE$

Aufgabe d (1)



Aufgabe d(2)

1. SCHRITT: SKIZZE



2. SCHRITT: BEGRÜNDUNG

Du brauchst die Flächeninhaltsformel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$. Dabei bietet sich die Seite $[OQ_u]$ als Grundseite g an. Die Länge der Grundseite ist u. Da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, entspricht die Seite $[P_uQ_u]$ der Höhe h, mit $h = h(u)$.
Demzufolge gilt für den Flächeninhalt in Abhängigkeit von u:
$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot h(u)$.

Aufgabe d (3)

1. SCHRITT: NOTWENDIGE BEDINGUNG FÜR EXTREMSTELLEN

Wenn u_E eine Extremstelle der Funktion A ist, dann muss gelten:

$A'(u_E) = 0.$

2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG DER FUNKTION *A* BESTIMMEN

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot h(u)$$

Für die Ableitung brauchst du die Produktregel:

$$A'(u) = \frac{1}{2} \cdot h(u) + \frac{1}{2} \cdot u \cdot h'(u)$$

3. SCHRITT: 1. ABLEITUNG NACH $h'(u_E)$ AUFLÖSEN

Da für u_E gilt: $A'(u_E) = 0$, ergibt sich die Gleichung

$\frac{1}{2} \cdot h(u_E) + \frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h'(u_E) = 0$, die du nach $h'(u_E)$ auflösen kannst:

$$\frac{1}{2} \cdot h(u_E) + \frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h'(u_E) = 0 \quad | -\frac{1}{2} \cdot h(u_e)$$

$$\frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h'(u_E) = -\frac{1}{2} \cdot h(u_E) \quad | \cdot \frac{2}{u_E}$$

$$h'(u_E) = -\frac{h(u_E)}{u_e}$$

4. SCHRITT: BEDINGUNG FÜR LOKALES MAXIMUM

Ist u_E ein lokales Maximum, so gilt: $A''(u_e) < 0$.

5. SCHRITT: 2. ABLEITUNG BILDEN

$$\begin{aligned} A'(u) &= \frac{1}{2} \cdot h(u) + \frac{1}{2} \cdot u \cdot h'(u) \\ A''(u) &= \frac{1}{2} \cdot h'(u) + \frac{1}{2} \cdot h'(u) + \frac{1}{2} \cdot u \cdot h''(u) \\ &= h'(u) + \frac{1}{2} \cdot u \cdot h''(u) \end{aligned}$$

Wenn also $h'(u_E) + \frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h''(u_E) < 0$ gilt, so ist u_E ein lokales Maximum.

Aufgabe d (4)

1. SCHRITT: FLÄCHENINHALTSFUNKTION AUFSTELLEN

$$\begin{aligned} A(a) &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot e^{-a^2} \\ &= \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot e^{-a^2} \end{aligned}$$

2. SCHRITT: 1. ABLEITUNG BERECHNEN

$$A'(a) = 3 \cdot a \cdot e^{-a^2} + \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot e^{-a^2} \cdot (-2a)$$
$$= 3 \cdot a \cdot e^{-a^2} - 3 \cdot a^3 \cdot e^{-a^2}$$
$$= 3 \cdot a \cdot e^{-a^2}(1 - a^2)$$

3. SCHRITT: 1. ABLEITUNG = 0 SETZEN UND GLEICHUNG LÖSEN

$3 \cdot a \cdot e^{-a^2}(1 - a^2) = 0$

Diese Gleichung hat die drei Lösungen 0 und ± 1, also gibt es für $a > 0$ genau eine Lösung, nämlich $a = 1$.
Es lohnt sich, zu untersuchen, ob der Flächeninhalt für $a = 1$ maximal ist:

4. SCHRITT: PRÜFEN, OB DER FLÄCHENINHALT MAXIMAL IST

Nach *d* (3) muss gelten: $f'(1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot f''(1) < 0$.

Die Ableitungen von *f* hast du schon unter a (2) bestimmt:

$f'(x) = 3 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ $\quad f'(1) = -\frac{3}{e}$

$f''(x) = -6x \cdot e^{-x^2}(3 - 2x^2)$ $\quad f''(1) = -\frac{6}{e}$

$$-\frac{3}{e} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{6}{e}\right) = -\frac{6}{e} < 0$$

Für $a > 0$ existiert tatsächlich ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt.