NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Analysis I, Teil 1

Bayern 2012

Aufgabe 1

a)

DEFINITIONSMENGE

$f(x) = \ln(x+3)$

$x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

$\Longrightarrow D_f =]-3;\ +\infty[$

ABLEITUNG

$f'(x) = \dfrac{1}{x+3} \cdot 1 = \dfrac{1}{x+3}$

b)

DEFINITIONSMENGE

$g(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

ABLEITUNG

$g'(x) = \dfrac{0 \cdot (x^2 - 1) - 3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-6x}{(x^2-1)^2}$

NOTIZEN

Aufgabe 2

a)

$f(x) = -x^2 + 5$ mit $D_f = \mathbb{R}$ erfüllt die Bedingung.

b)

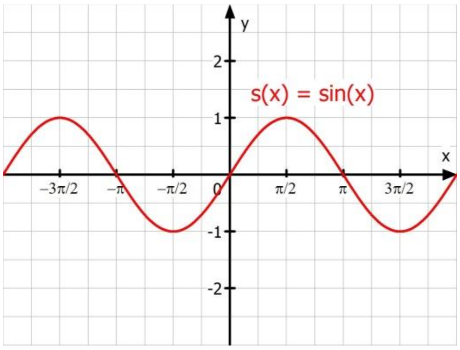
$g(x) = |x - 5|$ mit $D_g = \mathbb{R}$ erfüllt die Bedingung.

Aufgabe 3

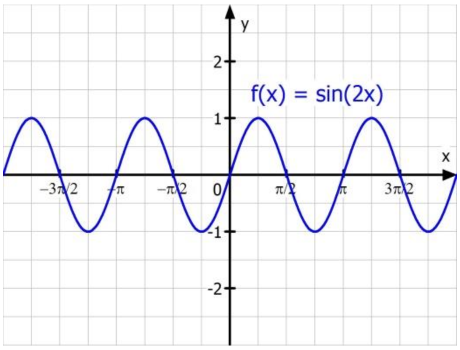
a)

$f(x) = \sin(2x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

Skizze von $s(x) = \sin(x)$:



Skizze von $f(x) = \sin(2x)$:

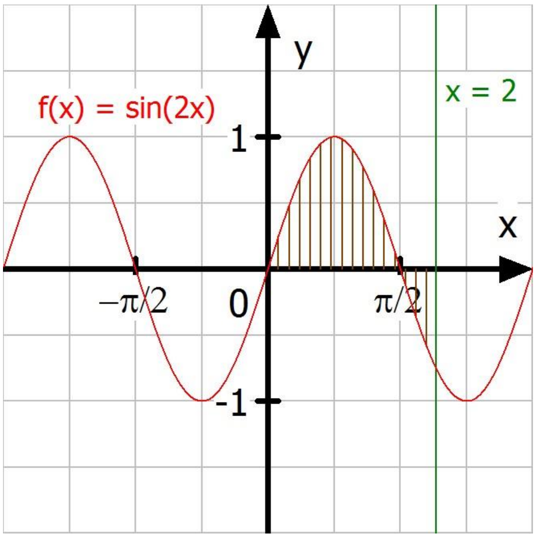


Zwei benachbarte Nullstellen sind z.B.: $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

NOTIZEN

b)

SKIZZE ZUM INTEGRAL



STAMMFUNKTION $\boldsymbol{F}$ VON $\boldsymbol{f}$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$$

(Probe: $F'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = \sin(2x) = f(x)$)

BESTIMMTES INTEGRAL

$$\int_0^2 f(x)dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(4) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos(0)\right)$$

$\approx 0{,}33 - (-0{,}5) = 0{,}83.$

INTEGRAL UND FLÄCHENINHALT

Das Integral $\approx 0{,}83$ ist die *Flächenbilanz* der vorzeichenbehafteten Teilflächen.

Der Flächeninhalt ist die Summe der Teilflächen, alle positive gewertet.

Integral und Flächeninhalt stimmen nur überein, wenn alle Flächenteile, die dazu gehören, *oberhalb der x-Achse* liegen. Das ist hier nicht der Fall, da der Integrand zwischen $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = 2$ negativ ist. Deswegen stimmen Integral und Flächeninhalt nicht überein.

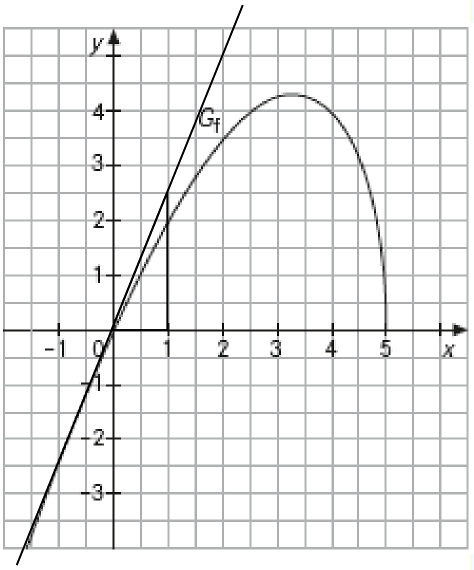
Aufgabe 4

NOTIZEN

STEIGUNGSWERT IN $(\mathbf{0}|\mathbf{0})$

Eine Tangente t am Graphen von f im Punkt $(0|0)$ mit Steigungsdreieck zeigt:

$m_t = f'(0) \approx 2{,}5.$



Also ist ein Punkt des Graphen der Ableitungsfunktion f' näherungsweise $A(0|2{,}5)$.

NULLSTELLE DER ABLEITUNG

Die einzige waagrechte Tangente ist beim Hochpunkt, also bei ca. $x = 3{,}25$. Dort liegt die Nullstelle von f'.

GRENZWERT FÜR $\boldsymbol{x \longrightarrow 5}$

Der Funktionsgraph wird für $x \longrightarrow 5$ unendlich steil fallend. Somit gilt: $\lim\limits_{x \to 5^-} f'(x) = -\infty.$

GRAPH DER ABLEITUNGSFUNKTION