NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Analysis II, Teil 1

Bayern 2012

Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{2x\ +\ 3}{x^2\ +\ 4x\ +\ 3}$$

DEFINITIONSMENGE

Nullstellen des Nenners:

$$x^2 + 4x + 3 \overset{!}{=} 0$$

Lösungen $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = -2 \pm 1$,

d.h. $x_1 = -3$ und $x_2 = -1$ sind verboten.

$\Longrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$

NULLSTELLE

Nullstelle von f ist die Nullstelle des Zählers:

$2x + 3 = 0 \Longrightarrow x_N = -1{,}5 \in D$

Aufgabe 2

a)

ABLEITUNG g'

mit Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} g'(x) &= x \cdot (e^{-2x})' + 1 \cdot e^{-2x} \\ &= x \cdot (-2) \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{-2x} \\ &= -2x \cdot e^{-2x} + e^{-2x}. \end{aligned}$$

NULLSTELLE DER ABLEITUNG

$$g'(x) = e^{-2x} \cdot (1 - 2x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0,$$

denn $e^{-2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Faktor $1 - 2x$ wird 0 bei $x_E = 0{,}5$.

y-WERT

$$g(0{,}5) = 0{,}5 \cdot e^{-1} = \frac{1}{2 \cdot e} \approx 0{,}18.$$

Der gesuchte Punkt mit waagrechter Tangente ist somit $\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2e}\right)$.

b)

GRENZWERTE DER FUNKTION

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-2x}^{\to \infty}}}_{\to \infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$$

nach der Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 3

a)

VERÄNDERUNG DES GRAPHEN

Die Logarithmusfunktion wird zuerst an der x-Achse gespiegelt und dann um 3 Einheiten in y-Richtung nach oben verschoben.

b)

ALLGEMEINE TANGENTENGLEICHUNG

allgemeine Geradengleichung: $y = m \cdot x + t$.

STEIGUNG

Es ist $h'(x) = -\frac{1}{x}$, also $m = h'(1) = -1$.

ACHSENABSCHNITT

$h(1) = -\ln(1) + 3 = 3$, also ist der Berührpunkt $(1|3)$.

Steigung und Berührpunkt in die allgemeine Geradengleichung einsetzen liefert

$3 = -1 \cdot 1 + t \Longrightarrow t = 4$.

FERTIGE TANGENTENGLEICHUNG

$y = -x + 4$

NOTIZEN

NOTIZEN

Aufgabe 4

a)

EIGENSCHAFT JEDER INTEGRALFUNKTION

Da ein Integral der Länge 0 immer den Wert 0 hat, ist grundsätzlich und unabhängig vom Integranden

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

An der unteren Grenze a hat also jede Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Nullstelle. Anders gesagt: $I_a(a) = 0$ gilt für jede Integralfunktion I_a.

b)

GEWÄHLTE FUNKTION

$F(x) = x \cdot (x+1) = x^2 + x$ hat die zwei Nullstellen $x = 0$ und $x = -1$ und ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Ableitung $f(x) = F'(x) = 2x + 1$ ist ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und erfüllt $\int_{-1}^x f(t)dt = F(x)$. Somit sind alle geforderten Bedingungen gewährleistet.