NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil: Analysis I 1

Baden-Württemberg 2012

Aufgabe I 1

a) Die Ortsdurchfahrt ist die Gerade AB; die Umgehungsstraße zwischen diesen beiden Punkten wird durch die Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^3 - -0{,}3x^2 + 0{,}4x + 3{,}2$ beschrieben. ($1LE$ entspricht 1km)

NÖRDLICHSTER PUNKT DER UMGEHUNGSSTRASSE

Der nördlichste Punkt N entspricht dem Hochpunkt des Graphen der Funktion f. Mittels des GTR erhalten Sie $N(0{,}53|3{,}31)$. Die zweite Nullstelle der Ableitung $-2{,}53$ führt auf den Tiefpunkt nahe A und ist für die Frage nicht relevant.

ABSTAND DER PUNKTE N UND M

Den Abstand vom Punkt $M(0|0{,}5)$ bestimmen Sie mithilfe des Satzes von Pythagoras. Es gilt:

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(0{,}53)^2 + (3{,}31 - 0{,}5)^2} \approx 2{,}86$$

Der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße ist ca. $2{,}86\text{km}$ vom Ortsmittelpunkt entfernt.

ÜBERGANG LINKS- IN RECHTSKURVE

Dieser Übergang findet im Wendepunkt W statt. Der GTR liefert: $W(-1|2{,}6)$.

EINMÜNDUNG OHNE KNICK

Da in der Aufgabe schon angegeben ist, dass Ortsdurchfahrt und Umgehungsstraße beide durch A verlaufen, genügt es zu zeigen, dass in A die Steigung der Ortsdurchfahrt AB und die Steigung der Umgehungsstraße übereinstimmen. Die Ortsdurchfahrt wird durch die Gerade g mithilfe der Punkte $A(-3|2)$ und $B(3|-1)$ beschrieben.

Bestimmen Sie mittels GTR $f'(-3) = -0{,}5$. Mithilfe des Steigungsdreiecks durch M und B erhält man für die Steigung der Ortsdurchfahrt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 0{,}5}{3 - 0} = -0{,}5$$

$\Longrightarrow$ Damit ist die knickfreie Einmündung der Umgehungsstraße in die Ortsdurchfahrt gezeigt.

b)

PROZENTUALER ANTEIL DER FLÄCHE

Die Gesamtfläche zwischen Ortsdurchfahrt und Umgehungsstraße erhalten Sie, indem Sie die Fläche zwischen dem Schaubild von f und der Geraden g durch A und B berechnen:

Für g gilt: $g(x) = -0{,}5x + 0{,}5$

$$A_{\text{ges}} = \int_{-3}^{3} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \quad \Longrightarrow \quad GTR \text{ liefert } A_{\text{ges}} = 10{,}8.$$

Das zu betrachtende Gemeindegebiet entspricht dem Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Radius 1,5.

$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot (1{,}5)^2 \cdot \pi = \frac{8}{9}\pi \approx 3{,}53$$

Der gesuchte Anteil ist:

$$\frac{10{,}8 - 3{,}53}{10{,}8} \approx 0{,}67$$

$\Longrightarrow$ Der Anteil der Fläche außerhalb des Gemeindegebiets beträgt ca. 67% der gesamten Fläche zwischen Ortsdurchfahrt und Umgehungsstraße.

c)

PUNKT *S* MIT SICHT AUF WINDKRAFTANLAGE

Der Punkt S liegt auf dem Schaubild von f. Er ist somit ein Laufpunkt mit den Koordinaten $S(x_s|f(x_s))$. Der frühestmögliche Punkt S, in dem der Fahrer den Punkt S, in dem der Fahrer den Punkt P genau in Fahrtrichtung vor sich sehen kann, liegt genau dann vor, wenn die Gerade durch P und S mit der Steigung der Tangente an das Schaubild von f in S zusammenfällt. Da die beiden Punkte S enthalten, braucht nur geprüft werden, ob ihre Steigungen

NOTIZEN

übereinstimmen.

Gesucht ist demnach eine Lösung der Gleichung:

$$\frac{f(x_s)-3}{x_s-1{,}5}=f'(x_s)$$

Mithilfe des GTR finden Sie im ersten Quadranten die erste Lösung bei $x_s = 0{,}9$. Der zugehörige Punkt liegt westlich von der Windkraftanlage und kommt daher als Lösung nicht infrage, weil der Fahrer die Windkraftanlage von dort genau hinter sich sehen würde statt genau vor sich. Der GTR liefert als weitere Lösung $x_s = 2$, der gesuchte Punkt ist demnach $S(2|2)$.

$\Longrightarrow$ Demnach gibt es keine weitere Lösung im ersten Quadranten.

d)

PUNKT *U* MIT FAHRTRICHTUNG PARALLEL ZUR ORTSDURCHFAHRT

Ein Fahrzeug fährt dort parallel zur Ortsdurchfahrt AB, wo die Tangente an das Schaubild von f die gleiche Steigung wie AB hat. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass sich U im ersten Quadranten befinden muss, denn nur hier verläuft die Tangente an das Schaubild von f parallel zu AB. Der GTR löst die Bedingung $f'(x_u) = -0{,}5$ durch $x_u = 1$. Wegen $f(1) = 3{,}2$ lautet der Punkt $U(1|3{,}2)$.

MAXIMALER ABSTAND

Im soeben ermittelten Punkt U ist der Abstand zur Ortsdurchfahrt g maximal, weil man sich „vorher" von g entfernt und „nachher" wieder g nähert. Der Abstand von U zu g entspricht der Länge der Strecke $\overline{UL}$, wobei L der Fußpunkt des Lotes von U auf g ist. Die Lotgerade entspricht der Normalen durch U und hat die Gleichung $n(x) = 2x + c$. Den fehlenden y-Achsenabschnitt c bestimmen Sie durch Einsetzen der Koordinaten von U.

Es gilt:

$$n(x) = 2x + 1{,}2$$

L ist der Schnittpunkt von n und g. Der GTR liefert: $L(-0{,}28|0{,}64)$
Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Pythagoras die Länge der Strecke $\overline{UL}$:

$$d_{max} = \sqrt{(-0{,}28-1)^2 + (0{,}64-3{,}2)^2} \approx 2{,}86$$

$\Longrightarrow$ Ein Fahrzeug auf der Umgehungsstraße hat einen maximalen Abstand zur Ortsdurchfahrt von etwa 2,86km.

NOTIZEN