NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil: Analysis I 2

Baden-Württemberg 2012

Aufgabe I 2

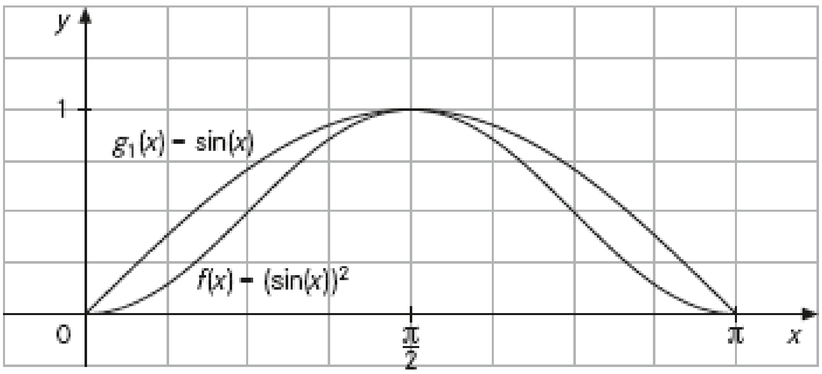
Die Funktion f ist gegeben und für jedes $t > 0$ die Funktion g durch

$f(x) = \sin^2(x)$ bzw. $g_t(x) = t \cdot \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Tipp: Bei dieser Aufgabe müssen Sie darauf achten, dass bei Ihrem GTR der Modus auf *Bogenmaß* eingestellt ist.

a)

SKIZZE DER GRAPHEN



AMPLITUDE UND PERIODE VON f

Anhand des GTR-Schaubildes erkennt man, dass das Schaubild von f die Periode π besitzt. Da die Funktionswerte zwischen 0 und 1 liegen, ist die Amplitude $0{,}5$.

GRÖSSTER UNTERSCHIED ZWISCHEN f UND g_1

Geben Sie die Differenzfunktion $d(x) = g_1(x) - f(x)$ in den GTR ein und bestimmen Sie das zugehörige Maximum.

$\Longrightarrow$ An den Stellen $x_{\max 1} \approx 0{,}52$ und $x_{\max 2} \approx 2{,}62$ ist der Unterschied jeweils am größten mit einem Wert von $d_{\max} = 0{,}25$.

b)

BESTIMMUNG DES PARAMETERS t, BEI EINEM SCHNITTWINKEL VON $45°$

Tipp: Zu jedem Schaubild kann der Schnittwinkel der Tangente mit der x-Achse berechnet werden, denn es gilt: $m = tan(\alpha)$.

In der Aufgabe soll das Verhalten im Ursprung untersucht werden. Konkret untersucht man also die Steigung an der Stelle $x = 0$.
$f'(0) = 2 \cdot \sin(0) \cdot \cos(0) = 0$, somit schließt die Tangente von f im Ursprung mit der x-Achse einen Winkel der Weite 0 ein. Um einen eingeschlossenen Winkel von $45°$ zwischen f und g_t zu erhalten, muss gelten:

$g_t'(0) = \tan(45°) = 1$ (hier: *Gradmaß*)

$\Longrightarrow$ Das heißt $t \cdot \cos(0) = 1$ und somit gilt $t = 1$.

EINGESCHLOSSENE FLÄCHE

Mithilfe des GTR berechnet man:

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\pi$$

Zur Bestimmung von t gilt folgender Ansatz:

$$\int_0^{\pi} g_t(x)\,dx = \frac{1}{2}\pi$$

Für die linke Seite gilt:

$$\int_0^{\pi} g_t(x)\,dx = [-t \cdot \cos(x)]_0^{\pi} = 2t$$

$\Longrightarrow$ Demnach ist $t = \frac{1}{4}\pi$.

c)

BESTIMMUNG DER GLEICHUNG $\overline{g_1}$ VON $\overline{K}$

Sie kennen bereits die Spiegelung eines Graphen an der x-Achse, im Funktionsterm wird dies durch eine Multiplikation mit dem Faktor -1 bewirkt.
Einer Spiegelung von K an h entspricht eine Spiegelung von K an der x-Achse mit anschließender Verschiebung in positive y-Richtung. Spiegelt man

NOTIZEN

h an der x-Achse, muss das Spiegelbild um 4 Einheiten in positive y-Richtung verschoben werden, um wieder in der Ausgangsposition zu sein. Daher gilt:

$$\overline{g_1}(x) = -g_1(x) + 4 = 4 - \sin(x)$$

FÜLLMENGE DES POKALS

Tipp: Die Formel für das Rotationsvolumen V_x geht von einer Rotation um die x-Achse aus:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\, dx\,; \quad (x_1 < x_2)$$

Der Graph von $\overline{K}$ rotiert um h. Die Funktionsgleichung von $\overline{g_1}$ muss daher noch um zwei vermindert werden, damit das zugehörige Schaubild um zwei Einheiten in negative y-Richtung verschoben wird.
Da der Pokal erst ab der engsten Stelle befüllt werden kann, muss zunächst die Minimalstelle von $\overline{g_1}(x) - 2$ ermittelt werden. Da es sich prinzipiell um eine Sinusfunktion handelt, liegt diese bei $\frac{1}{2}\pi$.

$$V = \pi \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{5{,}2} (2 - \sin(x))^2\, dx \approx 57{,}84$$

Die Angabe „eine Längeneinheit entspricht $2{,}5\mathrm{cm}$“ bedeutet für Volumeneinheiten: $1VE = (2{,}5\mathrm{cm})^3$. Somit gilt für das Volumen des Pokals
$V \approx 57{,}84 \cdot 2{,}5^3\mathrm{cm}^3 \approx 904\mathrm{cm}^3 = 0{,}904$ Liter

$\Longrightarrow$ Ein Liter Flüssigkeit passt also nicht in den Pokal.

NOTIZEN