NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil:
Analysis I 3

Baden-Württemberg 2012

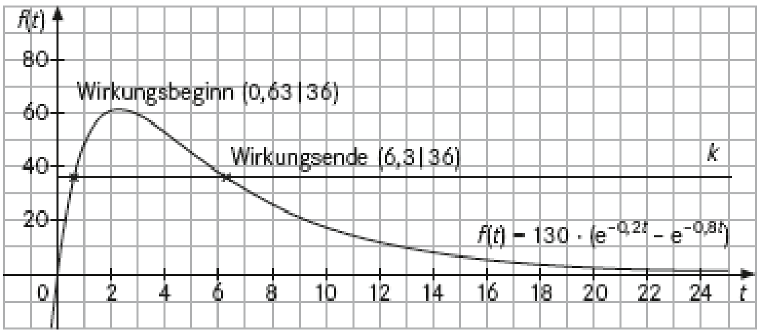
Aufgabe I 3

a)

SKIZZE DES GRAPHEN

WIRKUNGSZEITRAUM

Mithilfe des GTR bestimmen Sie näherungsweise die Schnittpunkte des Graphen von f mit dem Schaubild der konstanten Funktion k mit $k(x) = 36$. Die Schnittstellen begrenzen das Zeitintervall, in dem das Medikament wirkt: $[0{,}6281;\ 6{,}3050]$



STÄRKSTE ÄNDERUNG DER WIRKSTOFFMENGE

Anhand des Schaubilds von f' erkennt man bei $t = 0$ ein Randmaximum. Die stärkste Zunahme ist demnach zum Zeitpunkt $t = 0$ der Injektion.

Mithilfe des GTR bestimmen Sie näherungsweise den Wendepunkt des Graphen von f: $W(6{,}4210|48{,}3661)$. Nach gut viereinhalb Stunden ist die stärkste Abnahme der Wirkstoffmenge zu verzeichnen.

NOTIZEN

MITTLERE WIRKSTOFFMENGE

Mithilfe des GTR berechnen Sie:

$$\frac{1}{12}\int_0^{12} f(x)\,dx \approx 35{,}712$$

Man erkennt: Die mittlere Wirkstoffmenge während der ersten 12 Stunden beträgt ca. $35{,}7\mathrm{mg}$ und liegt unterhalb der Mindestanforderung von $36\mathrm{mg}$.

b)

LANGFRISTIGE WIRKSTOFFMENGE IM BLUT

Aus dem Funktionsterm lesen Sie für $t \longrightarrow \infty$ ab, dass langfristig $80\mathrm{mg}$ Wirkstoff im Blut vorhanden sind.

MONOTONIENACHWEIS

Bilden Sie die erste Ableitung:

$g'(t) = 80 \cdot (0{,}05 \cdot e^{-0{,}05t}) = 4 \cdot e^{-0{,}05t} > 0$ für alle t.

$\Longrightarrow$ Damit ist die ständige Zunahme der Wirkstoffmenge nachgewiesen.

ÄNDERUNGSRATE GENAU $1\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{min}}$

Mithilfe des GTR bestimmen Sie näherungsweise den Schnittpunkt des Graphen von g' mit dem Schaubild der konstanten Funktion I mit $I(x) = 1$: Sie erhalten $S(27{,}726|1)$. Die Schnittstelle $27{,}726$ gibt den gesuchten Zeitpunkt an. Das heißt, nach knapp 28 Minuten beträgt die Änderungsrate $1\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{min}}$.

VIERTELSTUNDENINTERVALL MIT $30\mathrm{mg}$ WIRKSTOFFÄNDERUNG

Grundgedanke: Gesucht ist das Intervall $[t_0;\ t_0 + 15]$, sodass gilt: $|g(t_0 + 15) - g(t_0)| = 30$. Mithilfe des GTR erhält man $t_0 \approx 6{,}830\mathrm{min}$.

$\Longrightarrow$ Das gesuchte Intervall ist somit $[6{,}830;\ 21{,}830]$.

NOTIZEN

c)

ZUGEHÖRIGE DIFFERENZIALGLEICHUNG

Es handelt sich hier um ein beschränktes Wachstum. Die Schranke S beträgt 80, der Änderungswert beträgt 0, der Proportionalitätsfaktor ist $0{,}05$.

Damit ist die gesuchte Differenzialgleichung der Funktion g:

$$g'(t) = 0{,}05 \cdot \big(80 - g(t)\big)$$

ZUGEFÜHRTE WIRKSTOFFMENGE PRO MINUTE

Die Änderung $g'(t)$ der Wirkstoffmenge im Blut kommt durch zwei sich überlagernde Prozesse zustande:

Die konstante Zufuhr k des Medikaments und die zum Bestand proportionale Abbaurate $c \cdot g(t)$ mit $-1 < c < 0$.

In Kurzform: $g'(t) = c \cdot g(t) + k$. $\quad (1)$

Durch Ausmultiplizieren der Differenzialgleichung $g'(t) = 0{,}05 \cdot (80 - -g(t))$ erhält man $g'(t) = 4 - 0{,}05 \cdot g(t)$.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Gleichung (1), erkennt man, dass die additive Konstante k den Wert 4 haben muss.

$\Longrightarrow$ Pro Minute werden demnach 4mg des Wirkstoffs zugeführt.

LANGFRISTIGER WIRKSTOFFGEHALT 90mg

Um langfristig 90mg Wirkstoff im Blut zu haben, muss das Modell entsprechend angepasst werden. Die Funktion h mit

$$h(t) = 90 \cdot (1 - e^{-0{,}05t})$$

beschreibt dann die Wirkstoffmenge im Blut. Analoge Überlegungen wie eben liefern:

$$h'(t) = 0{,}05 \cdot \big(90 - h(t)\big)$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$h'(t) = 4{,}5 - 0{,}05 \cdot h(t).$$

Erneut betrachtet man die additive Konstante $k = 4{,}5$.

$\Longrightarrow$ Pro Minute müssen demnach $4{,}5\text{mg}$ des Wirkstoffs zugeführt werden.

NOTIZEN