NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Wahlteil: Analytische Geometrie II 1

Baden-Württemberg 2012

Aufgabe II 1

Die Ebene E enthält die Punkte A(6|1|0), B(2|3|0) und P(3|0|2,5).

a)

AUFSTELLEN DER KOORDINATENGLEICHUNG E

Zunächst wird die Ebene E in Parameterform aufgestellt:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AP} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ von E muss folgende Eigenschaften erfüllen:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -3n_x - n_y + 2{,}5n_z = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -4n_x + 2n_y = 0$$

Eine Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS) lautet:

$$n_x = 1,\; n_y = 2,\; n_z = 2$$

$\Longrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E.

Nun müssen die Lösungen des LGS in die allgemeine Ebenengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ eingesetzt werden. Somit lautet der Ansatz für die Koordinatengleichung:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$$

Einsetzen des Punktes $A(6|1|0)$ liefert $d = 8$.

$\Longrightarrow$ Koordinatengleichung von E lautet $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$

NOTIZEN

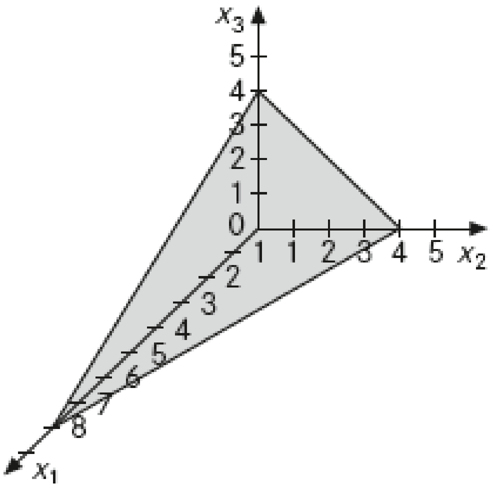
DARSTELLUNG DER EBENE IM KOORDINATENSYSTEM

Für eine übersichtliche Darstellung berechnen Sie

zuerst die Spurpunkte der Ebene E.

Setzen Sie $x_1 = x_2 = 0$ und Sie erhalten $S_3(0|0|4)$.

Analog erhalten Sie $S_2(0|4|0)$ und $S_1(8|0|0)$.



SCHNITTWINKEL α DER EBENE E MIT DER x_1-ACHSE

Die x_1-Achse kann als Gerade mit dem Ursprung als Stützpunkt und dem Richtungsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgefasst werden. Somit können Sie die Formel zur Schnittwinkelberechnung einer Ebene mit einer Geraden verwenden:

$$\sin(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{1}{3}$$

$\Longrightarrow$ Der Schnittwinkel beträgt somit $\alpha = 19{,}5°$.

b)

DREIECK *ABP* IST GLEICHSCHENKLIG

Berechnen Sie die Beträge der jeweiligen Differenzvektoren:

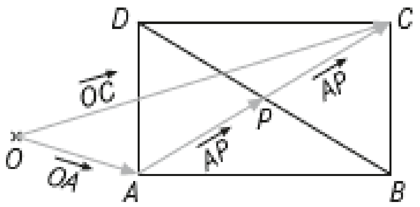
$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(3-6)^2 + (0-1)^2 + (2{,}5-0)^2} = \sqrt{16{,}25}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(2-6)^2 + (3-1)^2 + (0-0)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{(3-2)^2 + (0-3)^2 + (2{,}5-0)^2} = \sqrt{16{,}25}$$

$\Longrightarrow$ Es gilt $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right|$ und somit ist das Dreieck gleichschenklig.

BESTIMMUNG DER ECKEN *C* UND *D* EINES RECHTECKS



Mithilfe einer Vektorkette kann man den Punkt C wie folgt erreichen:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad C(0|-1|5)$$

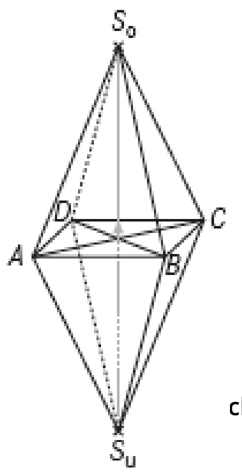
Analog bestimmt man die Koordinaten des Punktes D:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2\cdot\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad D(4|-3|5)$$

BESTIMMUNG DER PYRAMIDENSPITZEN S_O UND S_U

Es handelt sich um eine senkrechte Pyramide, sodass man durch Addition des 12-fachen Normaleinheitenvektors der Ebene E zum Ortsvektor des Punktes P eine mögliche Spitze erhält. Man sollte beachten, dass es auf beiden Seiten der Ebene E eine mögliche Spitze gibt. Die zweite Spitze erhalten Sie durch Addition des entsprechenden Gegenvektors zum Ortsvektor des Punktes P.



NOTIZEN

NOTIZEN

Mit einer Vektorkette kann man die Punkte S_O und S_U bestimmen:

$$\overrightarrow{OS_o} = \overrightarrow{OP} + 12 \cdot \vec{n}_{OE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + 12 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \quad S_O(7|{-8}|10{,}5)$

$$\overrightarrow{OS_U} = \overrightarrow{OP} - 12 \cdot \vec{n}_{OE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - 12 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \quad S_U(-1|{-8}|{-5{,}5})$

c)

BESTIMMUNG DES PUNKTES *L*, SODASS *ABL* EIN RECHTWINKLIGES DREIECK IST

L liegt auf der x_1-Achse und hat somit die Koordinaten $L(I|0|0)$, wobei $I \in \mathbb{R}$ gilt. Aus dem Aufgabentext geht hervor, dass $|\overrightarrow{AB}|$ die Hypotenuse des Dreiecks sein soll, somit stehen die beiden Vektoren $\overrightarrow{AL}$ und $\overrightarrow{BL}$ senkrecht aufeinander, und das zugehörige Skalarprodukt hat den Wert 0.

Es gilt:

$\overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{BL} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 6-I \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-I \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (6-I) \cdot (2-I) + 3 = 0$$

GTR liefert $I = 3$ oder $I = 5$.

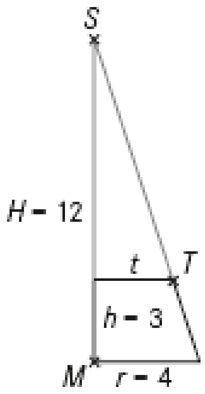
$\Longrightarrow$ Somit heißen die beiden möglichen Punkte $L_1(3|0|0)$ und $L_2(5|0|0)$.

d)

LAGE DES PUNKTES *R* BEZÜGLICH DES KEGELS

Betrachtet man lediglich die x_3-Koordinate der Punkte S und R, so erkennt man, dass R unterhalb der Kegelspitze liegen muss. Im zweiten Schritt muss geklärt werden, dass R auch im Inneren des Kegels und oberhalb des Kegelbodens liegt. Hierzu verwenden Sie einen Strahlensatz.

Stellen Sie sich einen senkrechten Schnitt durch den Kegel vor und betrachten Sie das Dreieck, das durch die Kegelspitze S, den Mittelpunkt M und einen Grundkreispunkt G im Abstand 4 (Radius) festgelegt wird. In der Höhe 3 liegt der Punkt R im Abstand $2\sqrt{2}$ von der Symmetrieachse, denn das ist der Abstand von $R(2|2|3)$ von Punkt $(0|0|3)$, der in gleicher Höhe auf der x_3-Achse liegt. Ein gedachter Punkt T auf gleicher Höhe wie R und auf dem Mantel des Kegels hat von der Symmetrieachseden Abstand t.



Strahlensatz:

$$\frac{t}{4} = \frac{(12-3)}{12} \quad \Longrightarrow \quad t = 3$$

R hat mit $2\sqrt{2}$ einen kleineren Abstand von der Symmetrieachse als T, daher liegt R im Inneren des Kegels.

ALTERNATIVE

Man betrachtet die Gerade von der Spitze S durch den Punkt R und ihren Schnittpunkt Q mit der x_1-x_2-Ebene. Liegt Q innerhalb des Grundkreises der Pyramide, so liegt auch R innerhalb des Körpers und umgekehrt.

Die Gleichung der Geraden SR lautet:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Da deren Schnittpunkt mit der x_1-x_2-Ebene die x_3-Koordinate 0 haben muss, findet man $r = \frac{4}{3}$ und $Q\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{8}{3}|0\right)$. Der Abstand von Q zum Ursprung

NOTIZEN

beträgt:

$$\frac{8}{3} \cdot \sqrt{2} = 3{,}77 < 4$$

$\Longrightarrow$ Somit liegt Q innerhalb des Grundkreises und R innerhalb des Kegelkörpers.

NOTIZEN