Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 4 Geometrie

Nordrhein-Westfalen 2012GK

Aufgabe a (1)

1. SCHRITT: *X*- UND Y-WERT DER PYRAMIDENSPITZE BERECHNEN

Die Spitze befindet sich einen Meter senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Grundfläche.

$$\overrightarrow{0M} = \overrightarrow{0A} + 0{,}5\overrightarrow{AC}$$

$$0{,}5\overrightarrow{AC} = 0{,}5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{0M} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$M(4{,}5|4{,}5|1)$

2. SCHRITT: KOORDINATEN DER SPITZE ANGEBEN

Die z-Koordinate ist um eine Einheit größer als die z-Koordinate von M.

Also hat S die Koordinaten $(4{,}5|4{,}5|2)$.

Aufgabe a (2)

1. SCHRITT: DEN VEKTOR $\overrightarrow{AS}$ BERECHNEN

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: LÄNGE DES VEKTORS $\overrightarrow{AS}$ BERECHNEN

$$|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{(-0{,}5)^2 + 0{,}5^2 + 1}$$
$$|\overrightarrow{AS}| \approx 1{,}22$$

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter, also ist die Seite $\overline{AS}$ etwa 1,22 m lang.

3. SCHRITT: SEITENLÄNGEN ANGEBEN

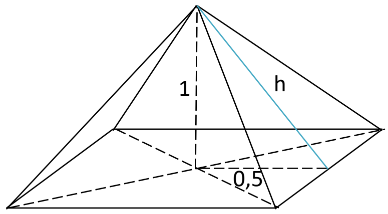
Da es sich um eine gerade Pyramide handelt, ist das Dreieck ABS gleichschenklig. Die Seiten $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$ sind 1,22 m lang. Die Länge der Seilte $\overline{AB}$ ist mit 1 m schon angegeben.

Aufgabe a (3)

1. SCHRITT: DIE HÖHE EINER SEITENFLÄCHE BERECHNEN

Für die Berechnung des Oberflächeninhalts brauchst du die Grundfläche G und die vier gleichgroßen Seitenflächen. Für die Grundfläche gilt: $G = 1\,m^2$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \quad g = 1\,m$



$h = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2}$

$h \approx 1{,}12\,m$

2. SCHRITT: OBERFLÄCHENINHALT BERECHNEN

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1{,}12$

$A_\Delta = 0{,}56\,m^2$

$A_O = 4 \cdot A_\Delta + G$

$A_O = 4 \cdot 0{,}56 + 1$

$A_O = 3{,}24\,m^2$

3. SCHRITT: VOLUMEN BERECHNEN

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1$

$V = \frac{1}{3}\,m^3$

Aufgabe b

1. SCHRITT: SKIZZE

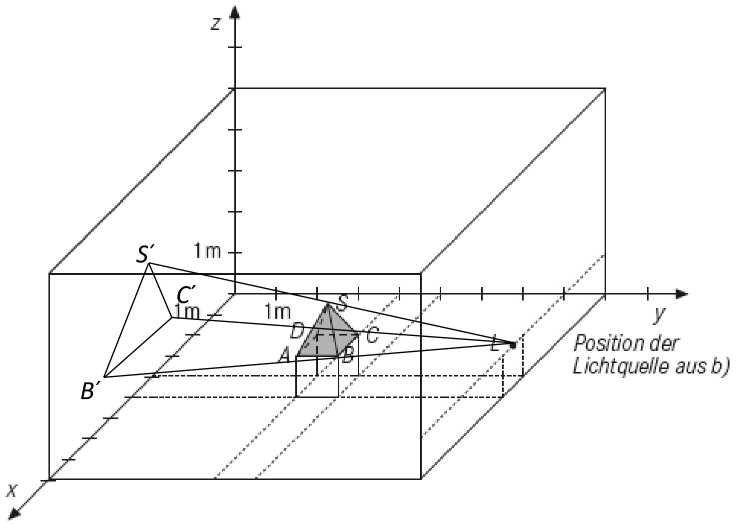


Abbildung 1

2. SCHRITT: GERADENGLEICHUNGEN AUFSTELLEN

Die Eckpunkte des Schattendreiecks sind die Schnittpunkte der Geraden b (LB), c (LC) und s (LS) mit der x-z-Ebene. Also stellst du zunächst die drei Geradengleichungen auf.
Für eine Geradengleichung brauchst du einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor. Zweckmäßigerweise wählst du den Punkt L als Aufpunkt für alle drei Geraden.

LB:

$$b\colon \vec{x} = \overrightarrow{0L} + \lambda \cdot \overrightarrow{LB}$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LC:

$$c\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \zeta \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LS:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \left[\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. SCHRITT: SCHNITTPUNKTE DER GERADEN MIT DER *X-Z*-EBENE BERECHNEN

Die x-z-Ebene hat die Gleichung $y = 0$, das macht es besonders einfach. Du musst die Parameter β, ζ und σ so bestimmen, dass die jeweilige y-Koordinate 0 wird.

$$B': \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$9 - 4\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta = 2{,}25$

$$\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2{,}25 \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}625 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B'(5{,}625|0|1)$

$$C': \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\zeta = 2{,}25$

$$\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2{,}25 \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}375 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$C'(3{,}375|0|1)$

$$S': \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\sigma = 2$

$$\begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$S'(4{,}5|0|3)$

4. SCHRITT: ZWEI SEITENLÄNGEN DES SCHATTENDREIECKS BERECHNEN

Wenn zwei Seiten gleich lang sind, können es eigentlich nur die Seiten $\overline{B'S'}$ und $\overline{C'S'}$ sein, also überprüfst du zunächst deren Länge.

$$\overrightarrow{B'S'} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5{,}625 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}125 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\left|\overrightarrow{B'S'}\right| = \sqrt{(-1{,}125)^2 + 2^2} = \sqrt{5{,}265625}$

$\overrightarrow{C'S'} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}375 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}125 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{C'S'}\right| = \sqrt{(1{,}125)^2 + 2^2} = \sqrt{5{,}265625}$ Bingo!

Sollte die Seite $\overline{B'C'}$ genauso lang sein, so macht das nichts, denn ein gleichseitiges Dreieck ist auch ein gleichschenkliges Dreieck.

5. SCHRITT: FLÄCHENINHALT DES SCHATTENDREIECKS BERECHNEN

Du kannst den Flächeninhalt natürlich mit der klassischen Methode $\frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ berechnen. Aber wenn du schon zwei Vektoren kennst, kannst du auch die Formel $A = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ verwenden.

$A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -1{,}125 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1{,}125 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 2{,}25\ m^2$

Alternative:

Die Punkte B' und C' liegen in der x-z-Ebene auf gleicher Höhe. Die Differenz der x-Werte ist 2,25. Also ist die Seite $\overline{B'C'}$ 2,25 m lang. Der Höhenunterschied des Punktes S′ zu den Punkten B′ bzw. C′ beträgt 2.

Für den Flächeninhalt gilt demnach: $A = \frac{1}{2} \cdot 2{,}25 \cdot 2 = 2{,}25\ m^2$.

Aufgabe c (1)

1. SCHRITT: MITTELPUNKT *P* DER SEITE [*AB*] BERECHNEN

Die Seitenhalbierende der Seite $[AB]$ geht durch den Mittelpunkt von $[AB]$ und durch den Punkt S.

$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0A} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P(5|4{,}5|1)$

2. SCHRITT: MITTELPUNKT DER STRECKE [*PS*] BESTIMMEN

Du kannst den Mittelpunkt einer Strecke auch folgendermaßen berechnen: Addiere die Koordinaten der Punkte, die die Strecke begrenzen, und teile sie durch 2.

$S(4{,}5|4{,}5|2)$

$P(5|4{,}5|1)$

$M\left(\frac{4{,}5+5}{2}\middle|\frac{4{,}5+4{,}5}{2}\middle|\frac{2+1}{2}\right)$

$M(4{,}75|4{,}5|1{,}5)$

Aufgabe c (2)

1. SCHRITT: NORMALENVEKTOR ZU DEN VEKTOREN $\overrightarrow{AB}$ UND $\overrightarrow{AS}$ BERECHNEN

Wenn der Laserstrahl orthogonal auf die Seitenfläche ABS trifft, dann stimmt sein Richtungsvektor mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene überein, in der die Seitenfläche ABS liegt.
Diesen Normalenvektor berechnest du mit dem Kreuzprodukt zweier Vektoren der Ebene, also z.B. den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \text{bzw.} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: GERADENGLEICHUNG DER GERADEN M AUFSTELLEN

Der Laserstrahl verläuft entlang der Geraden mit dem Aufpunkt M und dem Richtungsvektor $\vec{n}$.

$$m: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. SCHRITT: SCHNITTPUNKT DER GERADEN MIT DER HALLENWAND BERECHNEN

Der x-Wert aller Punkte der betreffenden Hallenwand ist 9.

Du bestimmst λ so, dass sich der x-Wert = 9 ergibt:

$4{,}75 + 2\lambda = 9 \Leftrightarrow \lambda = 2{,}125$

Für die Position der Laserlichtquelle gilt damit:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + 2{,}125 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4{,}5 \\ 3{,}625 \end{pmatrix}$$

Aufgabe d (1)

1. SCHRITT: MARKIERE DEN AUFPUNKT

$$E^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

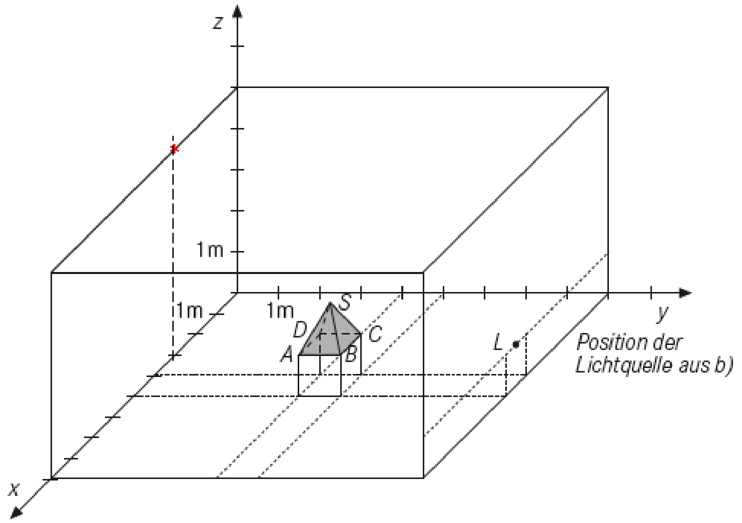


Abbildung 1

2. SCHRITT: RICHTUNGSVEKTOREN EINZEICHNEN

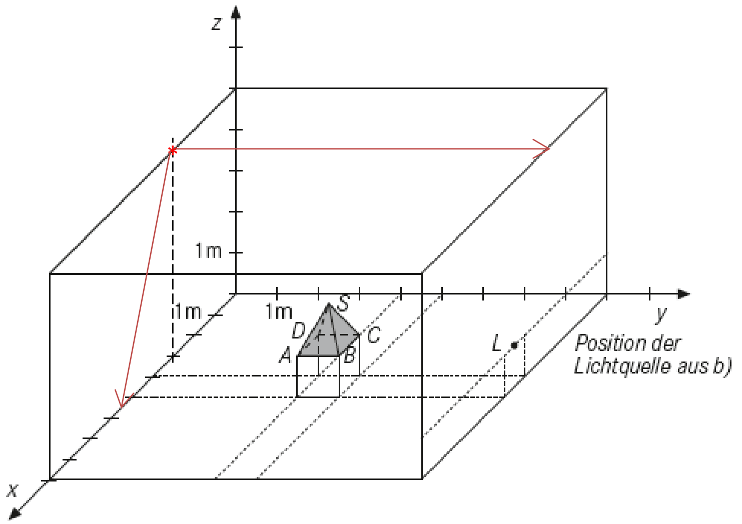


Abbildung 1

3. SCHRITT: SPUR DES LASERSTRAHLS EINZEICHNEN

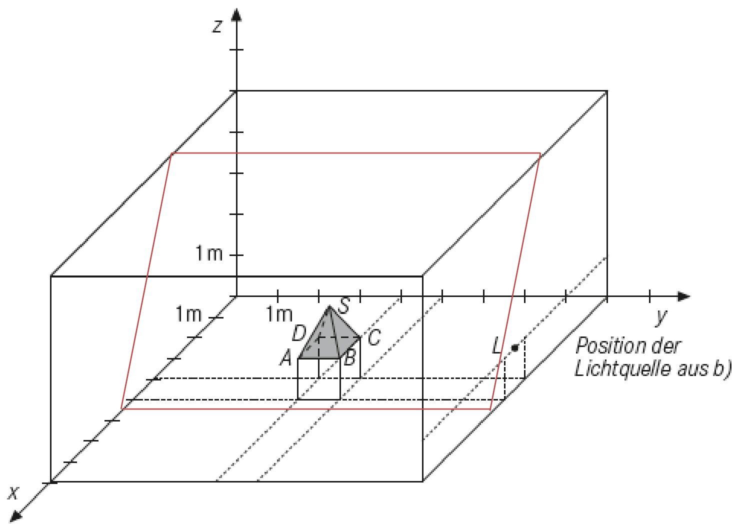


Abbildung 1

Aufgabe d (2)

1. SCHRITT: VORÜBERLEGUNG

Wenn $[BS]$ Element der Schnittgeraden ist, dann muss sie sowohl in der Ebene $_{BCS}$ liegen als auch in der Ebene E^*. Dass sie in der Ebene $_{BCS}$ liegt, ist klar, sie ist ja Bestandteil des Dreiecks. Du musst also nur noch schauen, ob sie auch in E^* liegt.

Dazu überprüfst du, ob der Punkt B oder der Punkt S in der Ebene liegt und ob der Vektor $\overrightarrow{BS}$ parallel zur Ebene ist.

2. SCHRITT: KOORDINATEN DES PUNKTES *B* MIT *E GLEICHSETZEN**

$$E^* = \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}$$

Für $r = 5$ und $s = 2$ geht die Gleichung auf. Der Punkt B ist also Element von E^*.

3. SCHRITT: ÜBERPRÜFEN, OB $\overrightarrow{BS}$ PARALLEL ZU *E IST**

$\overrightarrow{BS}$ und die Richtungsvektoren der Ebene E* müssen linear abhängig sein. Linear abhängig sind sie, wenn z.B. der Vektor $\overrightarrow{BS}$ als Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene dargestellt werden kann.

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 4{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung geht für $s = -0{,}5$ und $r = -0{,}5$ auf, die Kante $[BS]$ ist Element der Schnittgeraden.