Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabe 5: Analytische Geometrie (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

Aufgabe 5

a)

(1) PARALLELOGRAMMEIGENSCHAFTEN NACHWEISEN

Zu zeigen ist, dass die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, d. h. $AB \parallel CD$ und $BC \parallel AD$. Zunächst ist

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ linear abhängig, also gilt $AB \parallel CD$. $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$ sind identisch, also gilt auch $BC \parallel AD$.

ERGEBNIS

Die Seiten AB und CD sowie die Seiten BC und DA sind jeweils parallel, womit nachgewiesen ist, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

(2) BILDPUNKTE BERECHNEN UND QUADRATEIGENSCHAFT NACHWEISEN

BILDPUNKTE BERECHNEN

Setze $A'(a_1|a_2)$ als Bildpunkt von $A(-1|0)$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 0 \\ 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$B'(b_1|b_2)$ als Bildpunkt von $B(1|0)$:

$$\begin{aligned}\binom{b_1'}{b_2'} &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\binom{1}{0}+\binom{-2}{1}\\ &= \binom{(-1)\cdot 1+2\cdot 0}{1\cdot 1+0\cdot 0}+\binom{-2}{1}\\ &= \binom{-1}{1}+\binom{-2}{1}=\binom{-3}{2}\end{aligned}$$

$C'(c_1|c_2)$ als Bildpunkt von $C(3|2)$:

$$\begin{aligned}\binom{c_1'}{c_2'} &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\binom{3}{2}+\binom{-2}{1}\\ &= \binom{(-1)\cdot 3+2\cdot 2}{1\cdot 3+0\cdot 2}+\binom{-2}{1}\\ &= \binom{1}{3}+\binom{-2}{1}=\binom{-1}{4}\end{aligned}$$

$D'(d_1|d_2)$ als Bildpunkt von $D(1|2)$:

$$\begin{aligned}\binom{d_1'}{d_2'} &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\binom{1}{2}+\binom{-2}{1}\\ &= \binom{(-1)\cdot 1+2\cdot 2}{1\cdot 1+0\cdot 2}+\binom{-2}{1}\\ &= \binom{3}{1}+\binom{-2}{1}=\binom{1}{2}\end{aligned}$$

ERGEBNIS

Die Bildpunkte haben die Koordinaten $A'(-1|0)$, $B'(-3|2)$, $C'(-1|4)$, $D'(1|2)$.

QUADRATEIGENSCHAFTEN NACHWEISEN

Zu zeigen ist, dass die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang sind und benachbarte Seiten einen rechten Winkel bilden.

PARALLELITÄT GEGENÜBERLIEGENDER SEITEN NACHWEISEN

$$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}=\binom{-3}{2}-\binom{-1}{0}=\binom{-2}{2}$$

$$\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OB'}=\binom{-1}{4}-\binom{-3}{2}=\binom{2}{2}$$

$$\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{OD'}-\overrightarrow{OC'}=\binom{1}{2}-\binom{-1}{4}=\binom{2}{-2}$$

$$\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{OD'}-\overrightarrow{OA'}=\binom{1}{2}-\binom{-1}{0}=\binom{2}{2}$$

Es ist $\binom{-2}{2}=-\binom{2}{-2}$, also $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{C'D'}$ linear abhängig und somit $A'B' \parallel C'D'$. $\overrightarrow{B'C'}$ und $\overrightarrow{A'D'}$ sind identisch und somit $B'C' \parallel A'D'$.

SEITENLÄNGEN VERGLEICHEN

Die Längen der Seiten sind:

$\overline{A'B'} = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$,

$\overline{B'C'} = \left|\overrightarrow{B'C'}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$,

$\overline{C'D'} = \left|\overrightarrow{C'D'}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ und

$\overline{D'A'} = \left|\overrightarrow{D'A'}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.

Damit sind alle vier Seiten des Vierecks gleich lang.

INNENWINKEL UNTERSUCHEN

Nun wird geprüft, dass alle Innenwinkel rechte Winkel sind.

bei A':

$$\overrightarrow{A'B'} \circ \overrightarrow{D'A'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$$

bei B':

$$\overrightarrow{B'C'} \circ \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = -4 + 4 = 0$$

bei C':

$$\overrightarrow{B'C'} \circ \overrightarrow{C'D'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$$

Winkel bei D':

$$\overrightarrow{C'D'} \circ \overrightarrow{D'A'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) = -4 + 4 = 0$$

Alle Innenwinkel des Vierecks sind rechte Winkel.

ERGEBNIS

Das Viereck $A'B'C'D'$ ist ein Quadrat.

b)

(1) BILDGERADE g' UND LAGEBEZIEHUNG VON g UND g' BESTIMMEN

GLEICHUNG DER BILDGERADE FINDEN

Die Gleichung von g lautet

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3r \\ -1 + r \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die Gleichung der Abbildung α liefert

$$\begin{aligned}\alpha\begin{pmatrix}1+3r\\-1+r\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+3r\\-1+r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(-1)\cdot(1+3r)+2\cdot(-1+r)\\1\cdot(1+3r)+0\cdot(-1+r)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3-r\\1+3r\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5-r\\2+3r\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Bildgerade hat also die Gleichung

$$g'\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, r\in\mathbb{R}.$$

LAGEBEZIEHUNG ZWISCHEN g UND g' BESTIMMEN

Um die Schnittmenge der Geraden g und g' zu bestimmen, müssen die Geradengleichungen mit unterschiedlichen Parametern herangezogen werden; wir nehmen s für g'. Gleichsetzen von g und g' liefert dann $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, also als lineares Gleichungssystem

I: $1+3r=-5-s$
II: $-1+r=2+3s$

$$\text{I}-3\cdot\text{II}\colon 4=-11-10s \Leftrightarrow 15=-10s \Leftrightarrow s=-\frac{3}{2}$$

Eingesetzt in I liefert das

$$1+3r=-5+\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3r=-\frac{9}{2}\Leftrightarrow r=-\frac{3}{2}.$$

Somit gibt es genau einen Schnittpunkt von g und g'.

(2) BILDGERADE h' UND LAGEBEZIEHUNG VON h UND h' BESTIMMEN

GLEICHUNG DER BILDGERADE FINDEN

Die Gleichung von h lautet

$$h\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+2s\\-2-s\end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die Gleichung der Abbildung α liefert

$$\begin{aligned}\alpha\begin{pmatrix}-3+2s\\-2-s\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3+2s\\-2-s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(-1)\cdot(-3+2s)+2\cdot(-2-s)\\1\cdot(-3+2s)+0\cdot(-2-s)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1-4s\\-3+2s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-4s\\-2+2s\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Bildgerade hat also die Gleichung

$$h'\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}, s\in\mathbb{R}.$$

LAGEBEZIEHUNG ZWISCHEN h UND h' BESTIMMEN

Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Daher verlaufen die Geraden parallel. Desweiteren stimmen die Aufpunkte überein. Also ist $h = h'$.

c)

1. α(0|4) BESTIMMEN

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 0 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Bildpunkt hat die Koordinaten $P'(6|1)$.

2. UND 3. FIXPUNKTE BESTIMMEN

Gesucht sind alle Fixpunkte der Abbildung α. Dazu ist die Gleichung $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zu lösen, wobei

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 - 2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir das lineare Gleichungssystem

I: $-x_1 + 2x_2 - 2 = x_1 \Leftrightarrow -2 = 2x_1 - 2x_2 \Leftrightarrow -1 = x_1 - x_2$
II: $x_1 + 1 = x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = -1$

Die zwei Gleichungen sind äquivalent zur Gleichung von k. Sie werden also nur von den Punkten auf dieser Geraden erfüllt.

ERGEBNIS

Alle Punkte der Gerade k werden auf sich selbst abgebildet, denn sie erfüllen die Gleichungen I und II. Alle anderen Punkte erfüllen weder I noch II, also werden sie nicht auf sich selbst abgebildet.

4. GERADEN DURCH PUNKT UND BILDPUNKT VERGLEICHEN

Wie oben berechnet ist der Bildpunkt von $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ gegeben durch $\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 + 2a_2 - 2 \\ a_1 + 1 \end{pmatrix}$. Die Gerade durch Punkt und Bildpunkt ist daher

$$\begin{aligned} l: \vec{x} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} -a_1 + 2a_2 - 2 \\ a_1 + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2a_1 + 2a_2 - 2 \\ a_1 - a_2 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot (a_1 - a_2 + 1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Alle diese Geraden haben als Richtungsvektor ein Vielfaches von $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, sind also parallel zueinander, insbesondere also parallel zu PP' (dies ist der Spezialfall $a_1 = 0, a_2 = 4$).

d)

KONSTRUKTION VON Q' ERLÄUTERN

Da Q nicht auf der Gerade k liegt, ist nach Teilaufgabe c) 3. $Q' \neq Q$. Also muss die geometrische Konstruktion schrittweise erfolgen.

Zunächst werden in einem kartesischen Koordinatensystem der Punkt $Q(3|0)$ und die Fixpunktgerade $k: x_1 - x_2 = -1$ – z. B. als Verbindungsgerade der Punkte (0|1) und (1|2) – eingetragen. Dann ergänzt man die Gerade PP'. Laut Teilaufgabe c) 4. ist QQ' parallel zu PP'. Man zeichnet also QQ' in das Koordinatensystem als Gerade durch Q parallel zu PP' ein.

Nun liegt Q' auf der Geraden QQ' und es fehlt noch der Abstand zu Q. Dazu zeichnet man die Gerade durch Q senkrecht auf k ein und bezeichnet deren Schnittpunkt mit der Geraden PP' mit Q''.

Den Abstand von P' zu Q'' trägt man mit dem Zirkel ab und zeichnet dann einen Kreis um Q mit genau diesem Radius. Dieser Kreis hat zwei Schnittpunkte mit der Geraden QQ'. Einer davon liegt auf der gleichen Seite der Geraden k wie Q und der andere Schnittpunkt ist Q'.