Abitur Mathematik: Musterlösung

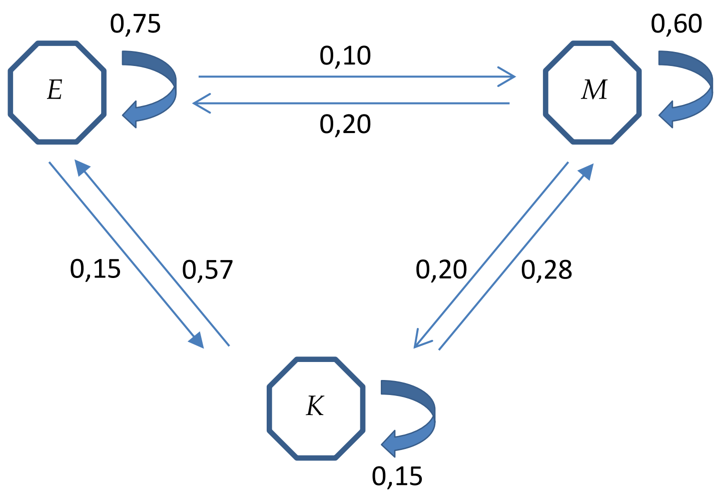
Prüfungsteil 2, Aufgabe 6
Lineare Algebra

Nordrhein-Westfalen 2012GK

Aufgabe a

1. SCHRITT: ÜBERGANGSDIAGRAMM ZEICHNEN

Du notierst die drei Gruppen E, M und K und stellst durch Pfeile das Buchungsverhalten im Folgejahr dar. Z. B.:



2. SCHRITT: ÜBERGANGSMATRIX ERSTELLEN

von: / nach:	*E*	*M*	*K*
E	0,75	0,2	0,57
M	0,10	0,6	0,28
K	0,15	0,2	0,15

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}10 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

Aufgabe b (1)

1. SCHRITT: MATRIZEN GEGENÜBERSTELLEN

$$\begin{array}{r|c} & \text{von:} \quad \text{E} \quad \text{M} \quad \text{K} \\ \hline \begin{array}{r} E \\ \text{nach: } M \\ K \end{array} & A_{alt} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}10 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c} & \text{von:} \quad \text{E} \quad \text{M} \quad \text{K} \\ \hline \begin{array}{r} E \\ \text{nach: } M \\ K \end{array} & A_{neu} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. SCHRITT: ÄNDERUNGEN ABLESEN

Gegenüber den früheren Jahren buchen jetzt 80 % derjenigen, die genau einen Urlaub gebucht haben, wieder genau einen Urlaub und nur noch 10 % buchen keinen Urlaub.
Bei den Kunden, die keinen Urlaub gebucht haben, buchen jetzt 60 % statt vorher 57 % genau einen Urlaub, statt 28 % buchen jetzt 30 % mehr als einen Urlaub und nur noch 10 statt 15 % buchen wieder keinen Urlaub.

Aufgabe b (2)

1. SCHRITT: DIE ZU ERWARTENDEN BUCHUNGEN FÜR *E*:

80 % der Stammkunden, die 2011 genau einen Urlaub gebucht hatten, werden 2012 wieder genau einen Urlaub buchen.
Das sind $2624 \cdot 0{,}8 = 2099{,}2$.
Hinzu kommen 20 % von denjenigen, die 2011 mehr als einen Urlaub geplant hatten, und die diesmal nur genau einen Urlaub buchen, also $1206 \cdot 0{,}2 = 241{,}2$.
Außerdem buchen noch 60 % der Kunden, die 2011 keinen Urlaub gebucht hatten, nun auch genau einen Urlaub:
$570 \cdot 0{,}6 = 342$.

Man kann also damit rechnen, dass im Jahr 2012
$2624 \cdot 0{,}8 + 1206 \cdot 0{,}2 + 570 \cdot 0{,}6 = 2682{,}4$, also rund 2682 Kunden genau einen Urlaub buchen werden.

2. SCHRITT: MATRIXMULTIPLIKATION

Genau diese Zahl und die Zahlen für M und K erhältst du, wenn du die Übergangsmatrix A mit dem Mengenvektor multiplizierst.

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 2624 + 0{,}2 \cdot 1206 + 0{,}6 \cdot 570 \\ 0{,}1 \cdot 2624 + 0{,}6 \cdot 1206 + 0{,}3 \cdot 570 \\ 0{,}1 \cdot 2624 + 0{,}2 \cdot 1206 + 0{,}1 \cdot 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2682{,}4 \\ 1157 \\ 560{,}6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe b (3)

1. SCHRITT: GLEICHUNG AUFSTELLEN

Gesucht ist diesmal der Mengenvektor $\vec{x}$.

Es soll gelten: $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix}$

2. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM HERLEITEN

Diese Gleichung führt zu dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} I) & 0{,}8x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}6x_3 = 2624 \\ II) & 0{,}1x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}3x_3 = 1206 \\ III) & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 570 \end{array}$$

3. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM LÖSEN

$$\begin{array}{lll} Ia) & I - 6 \cdot III: & 0{,}8x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}6x_3 = 2624 \\ & & \underline{-(0{,}6x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}6x_3 = 3420)} \\ & & 0{,}2x_1 - \quad x_2 \qquad = -796 \\ IIa) & II - 3 \cdot III: & 0{,}1x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}3x_3 = 1206 \\ & & \underline{-(0{,}3x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}3x_3 = 1710)} \\ & & -0{,}2x_1 \qquad = -504 | : (-0{,}2) \\ & & x_1 = 2520 \end{array}$$

x_1 in *Ia* eingesetzt, ergibt: $x_2 = 1300$.

$$\begin{aligned} 0{,}1 \cdot 2520 + 0{,}2 \cdot 1300 + 0{,}1x_3 &= 570 \quad && |zusammenfassen \\ 512 + 0{,}1x_3 &= 570 && | - 512 \\ 0{,}1x_3 &= 58 && | \cdot 10 \\ x_3 &= 580 \end{aligned}$$

Aufgabe c

1. SCHRITT: GLEICHUNG AUFSTELLEN

Gesucht ist der Mengenvektor $\vec{x}$ so, dass gilt:

$A \cdot \vec{x} = \vec{x}$, beziehungsweise:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM HERLEITEN

Diese Gleichung führt zu dem folgenden Gleichungssystem:

IV) $0{,}8x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}6x_3 = x_1$

V) $0{,}1x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}3x_3 = x_2$

VI) $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = x_3$

Außerdem soll gelten: $x_1 + x_2 + x_3 = 4400$

Nach einigen Umformungen hast du das folgende Gleichungssystem zu lösen:

I) $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$

II) $x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$

III) $x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 0$

IV) $x_1 + x_2 + x_3 = 4400$

3. SCHRITT: GLEICHUNGSSYSTEM LÖSEN

Gauß-Verfahren:

Zeile	x_1	x_2	x_3	b	Operation
1	$\underline{-1}$	1	3	0	
2	1	−4	3	0	
3	1	2	−9	0	
4	1	1	1	4400	
5	1	−1	−3	0	$1 \cdot (-1)$
6	0	$\underline{-3}$	6	0	$2 + 1$
7	0	3	−6	0	$3 + 1$
8	0	2	4	4400	$4 + 1$
9	1	0	−5	0	$5 - 1/3 \cdot 6$
10	0	1	−2	0	$6 \cdot (-1/3)$
11	0	0	0	0	$7 + 6$
12	0	0	$\underline{8}$	4400	$8 + 2/3 \cdot 6$
13	1	0	0	2750	$9 + 5/8 \cdot 12$
14	0	1	0	1100	$10 + 1/4 \cdot 12$
15	0	0	1	550	$12 : 8$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2750 \\ 1100 \\ 550 \end{pmatrix}$$

Aufgabe d (1)

Das Buchungsverhalten der Kunden der Gruppen E und M bleibt unverändert, das heißt, die Spalten unter E und unter M bleiben ebenfalls unverändert.

Der Anteil der Kunden, die von K zu E wechseln, zu M wechseln oder bei K bleiben, muss 1 sein.
Wir bezeichnen den Anteil, der von K zu E wechselt mit q, und den, der von K zu M wechselt, mit m. Der Anteil der Kunden, die bei K bleiben, ist 0,05.
Folglich gilt:

$$\begin{aligned} q + m + 0{,}05 &= 1 \\ q + m &= 0{,}95 \\ m &= 0{,}95 - q \end{aligned}$$

Das Buchungsverhalten durch die Matrix B beschrieben werden.

Aufgabe d (2)

1. SCHRITT: GLEICHUNG AUFSTELLEN

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95-q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2699 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. SCHRITT: q BERECHNEN

$$\begin{aligned} 2624 \cdot 0{,}8 + 1206 \cdot 0{,}2 + 570 \cdot q &= 2699 \\ 2340{,}4 + 570 \cdot q &= 2699 \\ 570 \cdot q &= 358{,}6 \\ q &\approx 0{,}63 \end{aligned}$$