NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Pflichtteil

Baden-Württemberg 2012

Aufgabe 1

Anwendung der Potenz- und Kettenregel liefert:

$f(x) = (\sin(x) + 7)^5$

$f'(x) = 5 \cdot (\sin(x) + 7)^4 \cdot \cos(x)$

$\quad = 5 \cdot \cos(x) \cdot (\sin(x) + 7)^4$

Aufgabe 2

$$F(x) = \int \left(2e^{4x} + \frac{3}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2} e^{4x} - \frac{3}{x}$$

Aufgabe 3

Umstellen der Ausgangsgleichung mithilfe des Distributivgesetzes liefert:

$\cos(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0$

Wenden Sie nun den Satz vom Nullprodukt an und untersuchen Sie die beiden Faktoren getrennt. Der zweite Faktor $(\sin(x) - 2)$ kann nie Null werden, da $\sin(x)$ nie den Wert 2 annimmt. Der erste Faktor $\cos(x)$ hat im zu untersuchenden Intervall die bekannten Nullstellen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$.

$\Longrightarrow$ Die Lösungen der Gleichung lauten damit $x_1 = \frac{\pi}{2}$ sowie $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

Aufgabe 4

Gleichsetzen der beiden Funktionsterme liefert:

$\frac{2}{x} = 2x - 3$

Multiplikation mit x und Umsortieren liefert:

$2x^2 - 3x - 2 = 0$

NOTIZEN

Durch Anwenden einer Lösungsformel (p-q-, a-b-c-Formel) erhalten Sie $x = 2$ oder $x = -\frac{1}{2}$. Den zugehörigen Funktionswert finden Sie durch Einsetzen in einen der beiden Funktionsterme:

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$ und $g(2) = 1$

$\Longrightarrow$ Somit lauten die gemeinsamen Punkte der Funktionsgraphen $P(-0{,}5|-4)$ und $Q(2|1)$.

In diesen beiden Punkten können sich die Schaubilder schneiden. Sollten sie sich senkrecht schneiden, muss an den Schnittstellen folgende Bedingung zusätzlich erfüllt sein:

$f'(x) \cdot g'(x) = -1$

$\Longrightarrow$ Ableitungen: $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ sowie $g'(x) = 2$

Einsetzen des x-Wertes liefert:

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -8$ sowie $g'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \quad \Longrightarrow \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot g'^{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -16$

$\Longrightarrow$ Somit schneiden sich die beiden Schaubilder in P nicht senkrecht.

Einsetzen der x-Werte von $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ und $g'(2) = 2$ liefert:

$f'(2) \cdot g'(2) = -1$

$\Longrightarrow$ Folglich schneiden sich die beiden Schaubilder in Q senkrecht.

Aufgabe 5

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

a) Wegen der additiven Konstante -2 in $f(x)$ kann nur Abbildung 2 passen, da nur diese den Punkt $S(0|-2)$ enthält.

b) Abbildung 4 zeigt ein gegenüber f um 2 Einheiten in positiver x-Richtung verschobenes Schaubild. Der zugehörige Funktionsterm lautet $f(x-2)$ und passt somit zu $g(x)$. Es gilt $a = 2$.

Abbildung 3 muss zu h gehören, weil sich durch Multiplikation mit b die Nullstellen nicht ändern. Es gilt $h(1) = 2$ und $f(1) = -4$. Wegen $h(1) = b \cdot f(1)$ ist $b = -0{,}5$.

c) Abbildung 1 zeigt ein gegenüber f um 3 in positive y-Richtung verschobenes Schaubild. Daher gilt: $k(x) = f(x) + 3 = x^3 - 3x + 1$.

NOTIZEN

Aufgabe 6

Geben Sie E in einer Koordinatenform an.

$E: 4(x_1 - 1) - 1(x_2 - 2) + 2(x_3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad E: 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4.$

Aus F folgt $x_2 = 8 - 2x_3$.

Einsetzen in E liefert:

$4x_1 - (8 - 2x_3) + 2x_3 = 4$

Auflösen nach x_1 ergibt $x_1 = 3 - x_3$. Wählt man $x_3 = r$, so erhält man $x_1 = 3 + r \cdot (-1)$, $x_2 = 8 + r \cdot (-2)$ sowie $x_3 = 0 + r \cdot 1$ und damit die Schnittgerade g:

$$\Longrightarrow \ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7

Der Punkt $A(1|1|3)$ und die Ebene $E: x_1 - x_3 - 4 = 0$ sind gegeben.

a)Ein Normalenvektor von E ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ist er senkrecht zur x_2-Achse. Folglich ist E parallel zur x_2-Achse.

b) Stellen Sie die Hilfsgerade h durch A senkrecht zu E auf:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}.$$

Schneiden Sie diese nun mit der Ebene E, um den Lotfußpunkt L zu erhalten:

$(1 + r) - (3 - r) - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 3$ und $L(4|1|0)$

Es gilt:

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Damit ist der Spiegelpunkt $A'(7|1|-3)$.

Aufgabe 8

Eine Ebene E und eine Gerade g, die in E liegt, sind gegeben. Eine Gerade h, die in E liegt und orthogonal zu g ist, wird gesucht.

Der Richtungsvektor $\vec{v}$ von h muss orthogonal zum Richtungsvektor von g und zu einem Normalenvektor von E sein. Als Stützvektor für h kommt jeder Ortsvektor eines Punktes auf g in Frage, beispielsweise der Stützvektor von g.

Liegt E in Koordinatenform vor, liest man $\vec{n}$ ab, bei Parameterform bestimmt man $\vec{n}$ als Kreuzprodukt der Richtungsvektoren von E. Nun erhält man einen Richtungsvektor $\vec{v}$ von h als Kreuzprodukt aus $\vec{n}$ und dem Richtungsvektor von g. Einen Punkt A in E kann man in der Parameterform ablesen. Bei der Koordinatenform kann man z. B. einen Spurpunkt finden, indem man 2 Koordinaten auf 0 setzt und die dritte ausrechnet.

Nun kann man h aufstellen als:

$\Longrightarrow\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{v}$ mit $r \in \mathbb{R}$

NOTIZEN