

Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 7 Stochastik

Nordrhein-Westfalen 2012GK

Aufgabe a

1. SCHRITT: ANGABEN NOTIEREN

$$E_1: n = 100 \quad p = \frac{1}{6} \quad k = 15$$

$$E_2: n = 200 \quad p = \frac{1}{6} \quad k \geq 25$$

$$E_3: n = 200 \quad p = \frac{1}{6} \quad 32 \leq k \leq 38$$

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN ERMITTELN

$$E_1: P(X = 15) = \binom{100}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{85} \approx 0,1$$

$$E_2: P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - \sum_{i=0}^{24} \left(\binom{200}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{200-i} \right)$$

In der Tabelle $p = \frac{1}{6}$ und $n = 200$ suchen und den Wert, der in der Spaltenspalte bei $k = 24$ steht, von 1 abziehen.

$$P(X \geq 25) \approx 0,9574$$

$$E_3: P(32 \leq X \leq 38) = P(X \leq 38) - P(X \leq 31) \approx 0,4658$$

Aufgabe b (1)

Das erste Gerät ist defekt *und* das zweite Gerät ist defekt. Die Wahrscheinlichkeit ist jeweils 0,04. Also gilt:

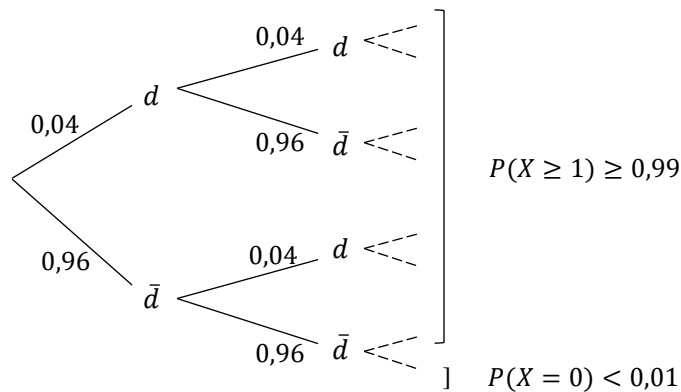
$$P(\text{zwei defekte Geräte}) = 0,04^2 = 0,0016$$

Aufgabe b (2)

1. SCHRITT: BAUMDIAGRAMM ZEICHNEN

Zunächst solltest du Symbole und deren Bedeutung festlegen, z.B..

- d defekt
 \bar{d} nicht defekt



2. SCHRITT: UNGLEICHUNG AUFSTELLEN UND LÖSEN

$$\begin{aligned}
 0,96^n &< 0,01 && | \text{logarithmieren} \\
 \ln 0,96^n &< \ln 0,01 && | \text{Logarithmusgesetz anwenden} \\
 n \cdot \ln 0,96 &< \ln 0,01 && | : \ln 0,96 \\
 n &> \frac{\ln 0,01}{\ln 0,96} \\
 n &> 112,8
 \end{aligned}$$

Der laufenden Produktion müssen mindestens 113 Geräte entnommen werden.

Aufgabe c

1. SCHRITT: $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ -INTERVALL FÜR $p = 0,04$ BERECHNEN

$$\begin{aligned}
 E_{0,04}(x) &= 200 \cdot 0,04 = 8 \\
 \sigma_{0,04} &= \sqrt{200 \cdot 0,04 \cdot 0,96} = 2,77
 \end{aligned}$$

Intervall: $[5,23; 10,77]$

2. SCHRITT: $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ -INTERVALL FÜR $p = 0,02$ BERECHNEN

$$\begin{aligned}
 E_{0,02}(x) &= 200 \cdot 0,02 = 4 \\
 \sigma_{0,02} &= \sqrt{200 \cdot 0,02 \cdot 0,98} = 1,98
 \end{aligned}$$

Intervall: $[2,02; 5,98]$

3. SCHRITT: SCHLUSSFOLGERUNG

6 defekte Geräte liegen in dem Intervall, das zu einem Ausschussanteil von 4 % passt. Also haben die Maschinen vor zwei Wochen vermutlich noch mit 4 % Ausschuss produziert.

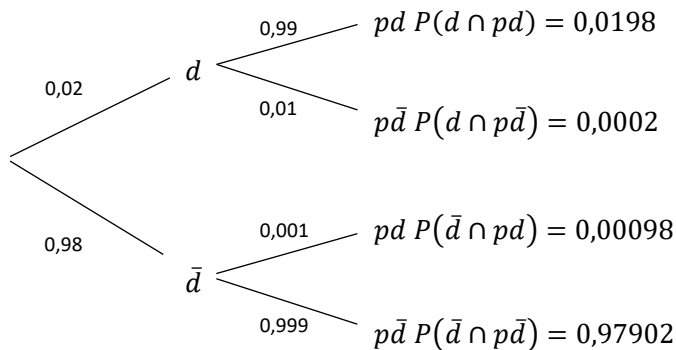
Aufgabe d (1)

1. SCHRITT: SYMBOLE FESTLEGEN

Der Übersichtlichkeit halber solltest du notieren, welche Symbole mit welcher Bedeutung du verwendest. Z.B.:

- d defekt
- \bar{d} nicht defekt
- pd Prüfgerät stuft als defekt ein.
- $p\bar{d}$ Prüfgerät stuft als nicht defekt ein.

2. SCHRITT: BAUMDIAGRAMM ZEICHNEN



Aufgabe d (2)

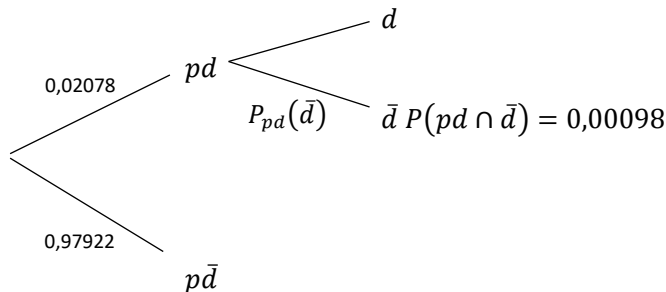
$$P(\text{Smartphone wird als defekt eingestuft}) = P(d \cap pd) + P(\bar{d} \cap pd) = 0,02078$$

Aufgabe d (3)

$$P_{pd}(\bar{d}) = \frac{P(p\bar{d})}{P(pd)}$$

$$P_{pd}(\bar{d}) = \frac{0,00098}{0,02078} \approx 0,04716$$

Alternative Baumdiagramm:



$P(pd \cap \bar{d})$ ist das Produkt aus $P(pd)$ und $P_{pd}(\bar{d})$. Also gilt:

$$P_{pd}(\bar{d}) = \frac{0,00098}{0,02078} \approx 0,04716$$

Aufgabe e (1)

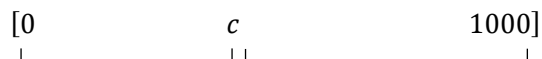
1. SCHRITT: GEGEBENE GRÖßEN NOTIEREN

$$H_0: p \leq 0,01 \quad H_1: p > 0,01$$

$$n = 1000$$

$$\alpha = 0,05$$

2. SCHRITT: ANNAHME- UND ABLEHNUNGSBEREICH FESTLEGEN



Annahmebereich Ablehnungsbereich
 $P(X \leq c) \geq 0,95$

Da die Nullhypothese $p \leq 0,01$ lautet, ist der linke Bereich der Annahmebereich für H_0 . Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist mit 5 % festgelegt, das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens c Geräte defekt sind, soll $\geq 0,95$ sein.

3. SCHRITT: PARAMETER C BESTIMMEN

Die Zufallsgröße „das getestete Gerät ist defekt“ ist zwar binomialverteilt, der Wert $n = 1000$ ist aber nicht mehr vertafelt. Man könnte die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximieren oder die σ – Regeln anwenden.

$$\text{Für } \sigma > 3 \text{ gilt nach den } \sigma \text{ – Regeln: } P(X \leq \mu + 1,64\sigma) = 0,95$$

$$\mu = 1000 \cdot 0,01 = 10$$

$$\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99}$$

$$\sigma \approx 3,15 > 3$$

$$c = \mu + 1,64 \cdot \sigma$$

$$c = 10 + 1,64 \cdot 3,15$$

$$c = 15,16$$

4. SCHRITT: ENTSCHEIDUNGSREGEL FORMULIEREN

Wenn sich unter den getesteten Geräten mehr als 15 defekte befinden sollten, muss man davon ausgehen, dass mehr als 1 % der Smartphones defekt sind.

Aufgabe e (2)

1. SCHRITT: DIE FEHLER 1. UND 2. ART ALLGEMEIN BESCHREIBEN

Fehler kann man natürlich viele machen, aber die Fehler 1. und 2. Art sind eigentlich keine Fehler, sondern eher Fehlentscheidungen, die auf Grund des Stichprobenergebnisses gefällt werden müssen.

Fehler 1. Art: Die Nullhypothese trifft zu, die Testgröße ist aber im Ablehnungsbereich gelandet, so dass man die Nullhypothese ablehnen muss.

Fehler 2. Art: Die Nullhypothese trifft nicht zu, die Stichprobe fällt aber so aus, dass man sich für die Annahme der Nullhypothese entscheiden muss.

2. SCHRITT: DIE BEDEUTUNG DER BEIDEN FEHLER IM SACHZUSAMMENHANG

Im vorliegenden Fall besteht der Fehler 1. Art darin, dass die Ausschussquote der Smartphones tatsächlich bei maximal einem Prozent liegt, der Händler aber unter den 1000 getesteten Geräten mehr als 15 defekte Geräte findet, er also der Aussage der Firma keinen Glauben schenken wird.

Der Fehler 2. Art: Es gibt weiterhin mehr als 1 % defekte Smartphones, aber unter den getesteten Geräten sind höchstens 15 defekt. Der Händler wird der Aussage der Firma glauben und die Preiserhöhung akzeptieren.