Abitur Mathematik: Musterlösung

# Aufgabe 7: Stochastik (WTR)

Nordrhein-Westfalen 2013

## Aufgabe 7

*a)*

**SITUATION MODELLIEREN**

Annahmen:

- Es werden 100 Personen unabhängig voneinander befragt.
- Auf die Frage, ob mindestens einmal im Monat ein Fahrrad genutzt wurde, gibt es genau zwei mögliche Antworten: „Ja“ oder „nein“.
- Die Antwort ist bei jeder Befragung mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ „Ja“ und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ „Nein“.

Die Anzahl $X$ der Personen, die mit „Ja“ antworten, ist somit binomialverteilt zu den Parametern $n = 100$ und $p = \frac{2}{3}$.

**WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR $E_1$ BERECHNEN**

Gesucht ist $P(E_1) = P(X = 70)$. Die Bernoulli-Formel liefert

$$P(X = 70) = \binom{100}{70} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{70} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{30} \approx 0{,}0673.$$

ERGEBNIS

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 6,7 % benutzen genau 70 der 100 Befragten ihr Fahrrad mindestens einmal im Monat.

**WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR $E_2$ BERECHNEN**

Gesucht ist $P(E_2) = P(X \geq 70)$. In Tabelle 4 (kumulierte Binomialverteilung für $n = 100$) werden die Daten für den Parameter $p = \frac{2}{3}$ nicht aufgelistet, also müssen wir mit $q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (Wahrscheinlichkeit für die Antwort „Nein“) arbeiten. Sei also $Y$ eine Zufallsvariable, die zählt, wie viele Befragte mit „Nein“ antworten. Es gilt $Y = 100 - X$ und $Y$

ist binomialverteilt zu den Parametern $n = 100$ und $q = \frac{1}{3}$. Es gilt $X \geq 70 \Leftrightarrow Y \leq 30$, also ist

$P(X \geq 70) = P(Y \leq 30) \approx 0{,}2766$

laut Tabelle.

ERGEBNIS

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 27,7 % benutzen mindestens 70 von den 100 Befragten ihr Fahrrad mindestens einmal im Monat.

**WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR $E_3$ BERECHNEN**

Gesucht ist

$P(E_3) = P(60 \leq X \leq 70) = P(30 \leq Y \leq 40) = P(Y \leq 40) - P(Y \leq 29)$, wobei aus Tabelle 4 die Werte $P(Y \leq 40) \approx 0{,}9341$ und $P(Y \leq 29) \approx 0{,}2093$ entnommen werden können. Demzufolge ist

$P(60 \leq X \leq 70) \approx 0{,}9341 - 0{,}2093 = 0{,}7248.$

ERGEBNIS

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 72,5 % benutzen mindestens 60 und höchstens 70 von 100 Befragten ihr Fahrrad mindestens einmal im Monat.

*b)*

**SITUATION MODELLIEREN**

Annahmen:

- Es werden $n$ Fahrräder unabhängig voneinander kontrolliert.
- Für jede Fahrradkontrolle gibt es genau zwei mögliche Ausgänge: „Beanstandung" oder „keine Beanstandung".
- Die Wahrscheinlichkeit einer Beanstandung ist bei jeder Kontrolle $\frac{1}{6}$.

Die Anzahl $X$ der Beanstandungen ist somit binomialverteilt zu den Parametern $n$ und $p = \frac{1}{6}$.

Gesucht ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$P(X \geq 1) \geq 90\,\%$ gilt. Dabei ist

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Die zu erfüllende Ungleichung lautet also

| | |
|---|---|
| $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}9$ | $\Big\vert -0{,}9 + \left(\frac{5}{6}\right)^n$ ; Seiten vertauschen |
| $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1$ | logarithmieren |

$\ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \leq \ln 0{,}1$ Logarithmengesetz anwenden

$n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln 0{,}1$ |: ln 0,9

$n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 12{,}63$

Die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist 13.

ERGEBNIS

Um mit 90 %iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Fahrrad mit Mängeln zu finden, müssen mindestens 13 Fahrräder kontrolliert werden.

*c)*

**(1) BAUMDIAGRAMM ERSTELLEN**

Bezeichnungen:

$K$ = Person wohnt in Ort mit unter 20 000 Einwohnern
$M$ = Person wohnt in Ort mit 20 000 bis 100 000 Einwohnern
$G$ = Person wohnt in Ort mit über 100 000 Einwohnern
$R$ = Person nutzt regelmäßig ein Fahrrad
$\overline{R}$ = Person nutzt nicht regelmäßig ein Fahrrad

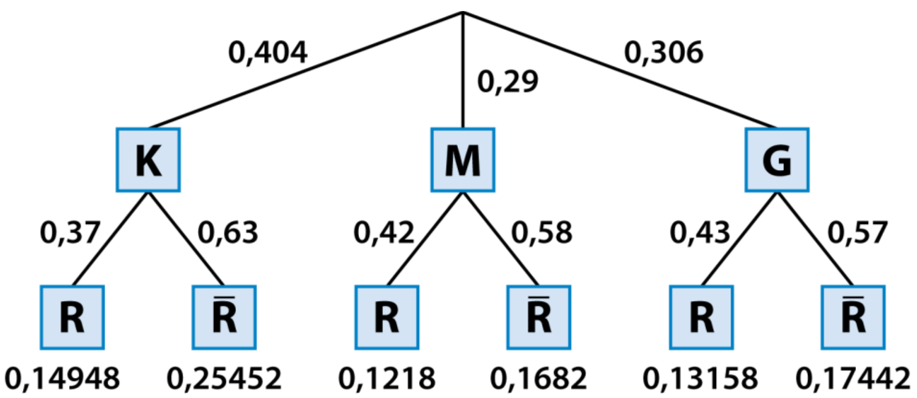
Die Einzelwahrscheinlichkeiten auf jeder Stufe des Zufallsexperiments gehen unmittelbar aus der Tabelle hervor. Es fehlen dann nur noch die Pfadwahrscheinlichkeiten, die mit Hilfe der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten folgendermaßen berechnet werden:

$P(KR) = P(K) \cdot P_K(R) = 0{,}404 \cdot 0{,}37 = 0{,}14948,$
$P(K\overline{R}) = P(K) \cdot P_K(\overline{R}) = 0{,}404 \cdot (1 - 0{,}37) = 0{,}25452,$

$P(MR) = P(M) \cdot P_M(R) = 0{,}29 \cdot 0{,}42 = 0{,}1218,$
$P(M\overline{R}) = P(M) \cdot P_M(\overline{R}) = 0{,}29 \cdot (1 - 0{,}42) = 0{,}1682,$

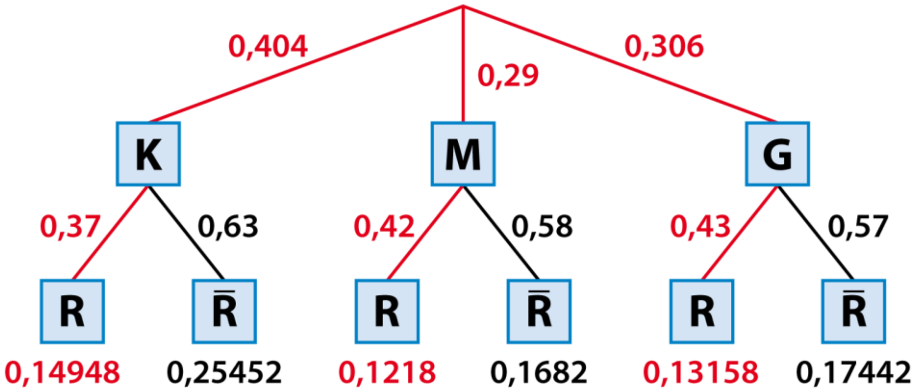
$P(GR) = P(G) \cdot P_G(R) = 0{,}306 \cdot 0{,}43 = 0{,}13158$ und
$P(G\overline{R}) = P(G) \cdot P_G(\overline{R}) = 0{,}306 \cdot (1 - 0{,}43) = 0{,}17442.$

Somit hat das Baumdiagramm folgende Gestalt:



**(2) WAHRSCHEINLICHKEIT DER REGELMÄßIGEN FAHRRADNUTZUNG BERECHNEN**

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(R)$ setzt sich aus den Wahrscheinlichkeiten der drei Pfade zusammen, die mit $R$ enden:




Nach der 2. Pfadregel ist

$$\begin{aligned} P(R) &= P(KR) + P(MR) + P(GR) \\ &= 0{,}14948 + 0{,}1218 + 0{,}13158 \\ &= 0{,}40286. \end{aligned}$$

ERGEBNIS

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebig ausgewählte Person regelmäßig ihr Fahrrad benutzt, beträgt etwa 40,3 %.

*d)*

**ERHÖHUNG DES VERLETZUNGSRISIKOS BERECHNEN**

Bezeichnungen:

$KH$ = 10- bis 15-jähriges Kind mit Helm
$K\overline{H}$ = 10- bis 15-jähriges Kind ohne Helm
$EH$ = 20- bis 40jähriger Fahrradfahrer mit Helm
$E\overline{H}$ = 20- bis 40jähriger Fahrradfahrer ohne Helm

$V$ = Verletzung
$\overline{V}$ = keine Verletzung

$x = P_{KH}(V)$ = Verletzungswahrscheinlichkeit eines Kindes mit Helm

Gesucht ist die prozentuale Differenz von $P_{K\overline{H}}(V)$ und $P_{EH}(V)$ gemessen an $P_{EH}(V)$, also

$$d = \frac{P_{K\overline{H}}(V) - P_{EH}(V)}{P_{EH}(V)}.$$

Dabei ist $P_{K\overline{H}}(V) = 4 \cdot P_{KH}(V) = 4x$ und $P_{EH}(V) = 0{,}55 \cdot P_{KH}(V) = 0{,}55x$.
Einsetzen in obige Gleichung liefert

$$d = \frac{4x - 0{,}55x}{0{,}55x} = \frac{3{,}45x}{0{,}55x} = \frac{345}{55} = \frac{69}{11} \approx 6{,}27 = 627\,\%\,.$$

ERGEBNIS

Bei einem 10- bis 15-jährigen Kind, das keinen Helm trägt, ist das Verletzungsrisiko um ca. 627 % höher als bei einem 20- bis 40-jährigen, der einen Helm trägt.

*e)*

**(1) TEST ENTWERFEN**

Es bezeichne $p$ den Anteil der Fahrräder mit Mängel.

WAHL UND BEGRÜNDUNG DER HYPOTHESEN

Mögliche Nullhypothesen sind

entweder

a) $p < 0{,}1$ („Weniger als 10 % der Fahrräder weisen Mängel auf.“)

oder

b) $p \geq 0{,}1$ („Mindestens 10 % der Fahrräder weisen Mängel auf.“).

Das Signifikanzniveau ist die obere Schranke für den Fehler 1. Art (Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese irrtümlich zu verwerfen). Die Folgen eines Fehlers 1. Art sind entweder

a) Es wird davon ausgegangen, dass mindestens 10 % der Fahrräder Mängel aufweisen, obwohl in Wirklichkeit weniger als 10 % der Fahrräder zu beanstanden sind, d. h. die Kontrollen werden nicht reduziert, obwohl dies gerechtfertigt wäre

oder

b) Es wird davon ausgegangen, dass weniger als 10 % der Fahrräder Mängel aufweisen, obwohl in Wirklichkeit mindestens 10 % der Fahrräder zu beanstanden sind, d. h. die Kontrollen werden ungerechtfertigterweise reduziert.

Im Fall a) würde die Polizei unnötigerweise auf Ressourcenersparnis verzichten. Im Fall b) wäre die Verkehrssicherheit gefährdet. Es ist also aus Sicht der Polizei sinnvoller, die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art im Fall b) gering zu halten.

Deswegen wird als Nullhypothese $H_0$: $p \geq 0{,}1$ gewählt. Die Alternative lautet dann $H_1$: $p < 0{,}1$.

ENTSCHEIDUNGSREGEL BESTIMMEN

Sei $X$ die Anzahl der beanstandeten Fahrräder bei der morgendlichen Kontrolle. $X$ ist binomialverteilt zu den Parametern $p$ und $n = 200$.

$H_0$ soll angenommen werden, wenn mindestens $k_0$ kontrollierte Fahrräder Mängel aufweisen.

Gesucht ist das größte $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k_0 \leq 200$, so dass für jedes $p \geq 0{,}1$ $P(X < k_0) \leq 0{,}05$ gewährleistet ist. Die Ungleichung $P(X < k_0) \leq 0{,}05$ ist genau dann für jedes $p \geq 0{,}1$ erfüllt, wenn sie für $p = 0{,}1$ gilt, denn $P(X < k_0)$ wird umso kleiner, je größer $p$ wird.

Aus Tabelle 5 (kumulierte Binomialverteilung für $n = 200$) entnimmt man $P(X \leq 12) \approx 0{,}032$ und $P(X \leq 13) \approx 0{,}0566$. Somit ist $k_0 = 13$.

Die Entscheidungsregel lautet also wie folgt:

Die Vermutung $p < 0{,}1$ soll als widerlegt betrachtet werden, wenn mindestens 13 von den 200 geprüften Fahrrädern Mängel aufweisen. Falls weniger als 13 Fahrräder beanstandet werden, soll die Vermutung als bestätigt angesehen werden und dementsprechend die Kontrollen nur noch jährlich durchgeführt werden.

**(2) ENTSCHEIDUNG TREFFEN UND BEGRÜNDEN**

Werden unter den 200 kontrollierten Fahrrädern 16 mit Mängeln gefunden, so liegt der Wert $X = 16$ im Annahmebereich von $H_0$. Nach der in (1) formulierten Entscheidungsregel sollte dann davon ausgegangen werden, dass mindestens 10 % der Fahrräder Mängel aufweisen. Dementsprechend sollten die Kontrollen nicht reduziert werden.

**(3) FEHLER 2. ART BESCHREIBEN**

Ein Fehler 2. Art tritt auf, wenn bei der Kontrolle der 200 Fahrräder mindestens 13 beanstandet werden, obwohl in Wirklichkeit weniger als 10 % aller Fahrräder Mängel aufweisen. In diesem Fall wird fälschlicherweise davon ausgegangen, dass $p \geq 0{,}1$ ist, also werden die monatlichen Kontrollen unnötigerweise beibehalten.