

Abitur Mathematik: Musterlösung

Prüfungsteil 2, Aufgabe 8 Stochastik

Nordrhein-Westfalen 2012GK

Aufgabe a (1) und (2)

1. SCHRITT: ANGABEN NOTIEREN

$$(1) \quad n = 100 \quad p = 0,25 \quad k \geq 30$$

$$(2) \quad n = 200 \quad p = 0,1 \quad 8 \leq k \leq 18$$

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN ERMITTELN

$$(1) \quad P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 29) = 1 - \sum_{i=0}^{29} \binom{100}{i} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{100-i}$$

In der Tabelle $p = 0,25$ und $n = 100$ suchen und den Wert, der in der Spaltenspalte bei $k = 29$ steht, von 1 abziehen.

$$P(X \geq 30) = 0,14954$$

$$(2) \quad P(8 \leq X \leq 18) = P(X \leq 18) - P(X \leq 7) = 0,3724 - 0,00048 = 0,37192$$

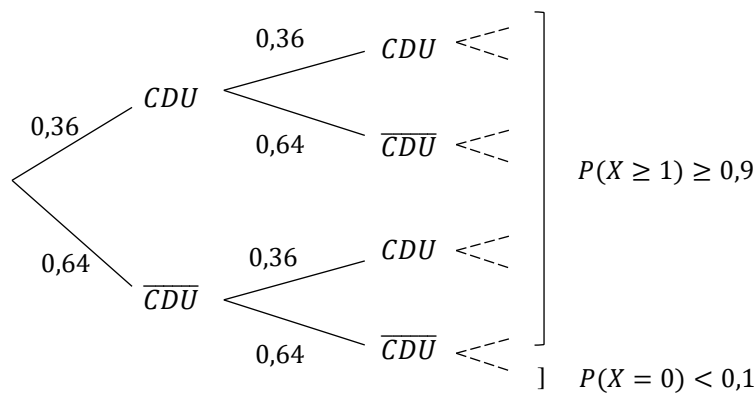
Aufgabe a (3)

1. SCHRITT: BAUMDIAGRAMM ZEICHNEN

Zunächst solltest du Symbole und deren Bedeutung festlegen, z.B.:

CDU Die Person würde die CDU wählen.

\overline{CDU} Die Person würde die CDU nicht wählen.



2. SCHRITT: UNGLEICHUNG AUFSTELLEN UND LÖSEN

$$\begin{aligned}
 0,64^n &< 0,1 && | \text{logarithmieren} \\
 \ln 0,64^n &< \ln 0,1 && | \text{Logarithmusgesetz anwenden} \\
 n \cdot \ln 0,64 &< \ln 0,1 && | : \ln 0,64 \\
 n &> \frac{\ln 0,1}{\ln 0,64} \\
 n &> 5,16
 \end{aligned}$$

Wenn man mindestens 6 Personen befragt, findet man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Person, die die CDU wählen würde.

Aufgabe a (4)

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT PRO PFAD BERECHNEN

$n = 7$ $p = 0,36$ $k = 3$

In der Bernoulli-Kette gibt es dreimal die Wahrscheinlichkeit 0,36 und viermal die Gegenwahrscheinlichkeit 0,64. Ein Pfad hat also die Wahrscheinlichkeit

$$0,36^3 \cdot 0,64^4 = 0,007828.$$

2. SCHRITT: ANZAHL DER PFADE ERMITTELN

Die erste Möglichkeit für die drei CDU-Wähler sind die Positionen 1 bis 3, die letzte die Positionen 5 bis 7.

Es gibt also 5 Pfade. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $5 \cdot 0,007828 = 0,03914$.

Aufgabe b

1. SCHRITT: μ UND σ BERECHNEN

10 % für die Grünen ist das Ergebnis einer Stichprobe. Der tatsächliche Anteil der Wählerstimmen für die Grünen kann mit diesem Wert übereinstimmen, muss es aber nicht. Der Wahlkampfmanager sucht daher ein Intervall (symmetrisch um den Erwartungswert), in dem der Anteil der Wählerstimmen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

Man kann von einer Binomialverteilung ausgehen, mit $n = 1352$ und $p = 0,1$.

$\mu = 135,2$ und $\sigma = \sqrt{1352 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 11,03 > 3$, das heißt, du kannst die σ -Regeln anwenden.

2. SCHRITT: ENTSPRECHENDE σ -REGEL FINDEN

Nach den σ -Regeln gilt für die Wahrscheinlichkeit 0,95:

$$\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma$$

3. SCHRITT: DOPPELUNGLEICHUNG NACH P AUFLÖSEN

Mit $\mu = n \cdot p$ erhältst du:

$$n \cdot p - 1,96\sigma \leq X \leq n \cdot p + 1,96\sigma$$

Diese Doppelungleichung durch n dividiert ergibt:

$$p - \frac{1,96\sigma}{n} \leq \frac{X}{n} \leq p + \frac{1,96\sigma}{n}$$

$$\left| \frac{X}{n} - p \right| \leq \frac{1,96\sigma}{n}$$

Aus dem Umfrageergebnis hat sich ergeben, dass $\frac{X}{n} = 0,1$ ist.

$$|0,1 - p| \leq \frac{1,96\sqrt{1352 \cdot p \cdot (1-p)}}{1352} \quad |quadrieren$$

$$(0,1 - p)^2 \leq \frac{1,96^2 \cdot p \cdot (1 - p)}{1352}$$

$$(0,1 - p)^2 \leq 0,00284142(p - p^2)$$

$$0,01 - 0,2p + p^2 \leq 0,00284142p - 0,00284142p^2$$

$$1,00284142p^2 - 0,20284142p + 0,01 \leq 0$$

$$p_1 \approx 0,0851$$

$$p_2 \approx 0,1171$$

Damit liegt der tatsächliche Anteil der Wählerstimmen für die Grünen zwischen 8,51 und 11,71 %.

Aufgabe c

1. SCHRITT: DOPPELUNGLEICHUNG AUFSTELLEN

Es geht wieder um die Doppelungleichung

$$p - \frac{1,96\sigma}{n} \leq \frac{X}{n} \leq p + \frac{1,96\sigma}{n}.$$

2. SCHRITT: GEGEBENE WERTE EINSETZEN

Nach der Wahl ist der tatsächliche Wert p , mit $p = 0,146$ bekannt.

$\frac{X}{n}$ ist der Anteil der FDP-Wähler aus der Umfrage, mit $\frac{X}{n} = 0,13$.

Du musst prüfen, ob diese Werte mit der Ungleichung vereinbar sind.

$$0,146 - \frac{1,96\sqrt{1352 \cdot 0,146 \cdot 0,854}}{1352} \leq 0,13 \leq 0,146 + \frac{1,96\sqrt{1352 \cdot 0,146 \cdot 0,854}}{1352} ?$$

3. SCHRITT: RICHTIGKEIT DER DOPPELUNGLEICHUNG PRÜFEN

$$0,12718 \leq 0,13 \leq 0,16482$$

Die Doppelungleichung stimmt, das Umfrageergebnis ist mit dem Wahlergebnis verträglich. Der Einfluss der kurzentschlossenen Wähler ist wohl doch nicht so groß, wie behauptet.

Aufgabe d

1. SCHRITT: FORMEL FÜR DIE INTERVALLLÄNGE AUFSTELLEN

Die Intervalllänge soll $\pm 0,02$, also höchstens 0,04 betragen.

Die Länge des Intervalls berechnest du, indem du die Untergrenze von der Obergrenze subtrahierst, also

$$L = p + \frac{z \cdot \sigma}{n} - \left(p - \frac{z \cdot \sigma}{n} \right) = \frac{2 \cdot z \cdot \sigma}{n}$$

Das heißt, es soll gelten: $\frac{2 \cdot z \cdot \sigma}{n} \leq 0,04$.

2. SCHRITT: z BESTIMMEN UND WAHRSCHEINLICHKEIT FESTLEGEN

Die Sicherheitswahrscheinlichkeit soll 0,9 sein. Aus den σ -Regeln ergibt sich der Wert 1,64 für z .

Sei $p = 0,12$, dann ist $\sigma = \sqrt{n \cdot 0,12 \cdot 0,88}$

3. SCHRITT: MINDESTUMFANG DER STICHPROBE BERECHNEN

Alle Werte eingesetzt, ergibt:

$$\frac{2 \cdot 1,64 \cdot \sqrt{n \cdot 0,1056}}{n} \leq 0,04$$

$$\frac{3,28 \cdot \sqrt{0,1056\sqrt{n}}}{n} \leq 0,04$$

$$\frac{3,28 \cdot \sqrt{0,1056}}{\sqrt{n}} \leq 0,04$$

$$3,28 \cdot \sqrt{1,056} \leq 0,04\sqrt{n}$$

$$n \geq 710,05$$

Es müssten mindestens 711 Personen befragt werden.

4. SCHRITT: ZUSAMMENHANG ERKLÄREN

Je höher die Sicherheitswahrscheinlichkeit, desto breiter ist das dazugehörige Konfidenzintervall. Das heißt, eine hohe Sicherheitswahrscheinlichkeit verringert die Genauigkeit der Prognose. Man kann die Genauigkeit bei gegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit jedoch verbessern, indem man den Stichprobenumfang erhöht. Je größer n ist, desto kleiner wird das Konfidenzintervall.