

Abitur Mathematik: Musterlösung

Stochastik I

Bayern G8 2012

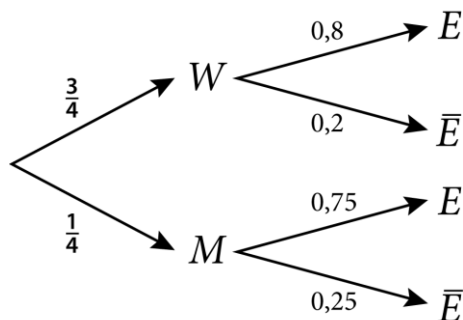
Aufgabe 1

BAUMDIAGRAMM

Bezeichnungen:

M = „männlich“, W = „weiblich“

E = „Durchschnitt 1,5 oder besser“, \bar{E} = „Durchschnitt schlechter als 1,5“



$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= P(W \cap \bar{E}) + P(M \cap \bar{E}) \\ &= \frac{3}{4} \cdot 0,2 + \frac{1}{4} \cdot 0,25 \\ &= \frac{3}{20} + \frac{1}{16} = \frac{17}{80} = 0,2125 = 21,25\%. \end{aligned}$$

ANTWORT: Der Anteil aller Bewerber mit einem Abiturdurchschnitt von schlechter als 1,5 beträgt 21,25 %.

Aufgabe 2

a)

WARUM DER TERM NICHT PASST

Das Casting entspricht 15-mal Ziehen ohne Zurücklegen (da keine Person mehrfach ausgewählt wird) aus zwei möglichen Ergebnissen (weiblich / männlich). Die Bernoulliformel $\binom{15}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ liefert die

NOTIZ
EN

Stochastik I

Wahrscheinlichkeit, bei 15-mal Ziehen mit Zurücklegen (jede Person kann mehrfach gezogen werden) aus 20 weiblichen und 10 männlichen Personen genau 5 mal eine männliche und 10 mal eine weibliche Person zu ziehen. Die Modellannahme für die Bernoulliformel ist eine immer gleich bleibenden Trefferwahrscheinlichkeit, die aber im vorliegenden Fall nicht gewährleistet ist.

b)

WAHRSCHEINLICHKEIT p

Es ergibt sich mit der Lottoformel folgende Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\text{Anzahl der günstigen Möglichkeiten}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}} \\
 &= \frac{\binom{20}{10} \cdot \binom{10}{5}}{\binom{30}{15}} \\
 &= \frac{184756 \cdot 252}{155117520} = \frac{1001}{3335} \approx 30,0 \%.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

ERGEBNISSE EINES WÜRFELS

Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen 0, 1 und 2:

$$P("0") = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; P("1") = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; P("2") = \frac{1}{6}$$

AUGENSUMME 2 VON ZWEI WÜRFELN

Die Augensumme von zwei Würfeln ergibt die Anzahl Mathematik-Fragen an den Kandidaten. Die beiden Würfe sind unabhängig voneinander.

$$\begin{aligned}
 P(\text{"Augensumme 2"}) &= P("0 + 2" \text{ oder } "1 + 1" \text{ oder } "2 + 0") \\
 &= P(0) \cdot P(2) + P(1) \cdot P(1) + P(2) \cdot P(0) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{36} \approx 36,1 \%.
 \end{aligned}$$

ANTWORT: Der erste Kandidat bekommt mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 36,1 % genau zwei Fragen aus dem Fachgebiet Mathematik.

NOTIZ
EN

b)

FEHLENDER WERT IN DER WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG

$P(X = 3)$ erhält man durch Subtraktion der vier gegebenen Wahrscheinlichkeiten vom Summenwert 1:

$$P(X = 3) = 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{13}{36} + \frac{1}{36} \right) = \frac{1}{6}$$

ERWARTUNGSWERT

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{13}{36} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \approx 1,7. \end{aligned}$$

Im Mittel muss ein Kandidat also ca. 1,7 Mathematik-Fragen beantworten.

c)

MATHEMATISCHES MODELL

Y soll die Zufallsvariable sein, die die Anzahl der Kandidaten mit 0 Mathematik-Fragen angibt.

$n = 10$ (Anzahl der Kandidaten)

Treffer = „0 Mathematik-Fragen“ (bei einem Kandidaten)

$p = P(\text{Treffer}) = P(X = 0) = \frac{1}{9}$ (für jeden Kandidaten gleich, s.o.)

WAHRSCHEINLICHKEIT DAFÜR, DASS DIE ANZAHL DER KANDIDATEN MIT 0 MATHEMATIK-FRAGEN 1 IST

$$P(Y = 1) = B\left(10; \frac{1}{9}; 1\right) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^9 = 0,384933 \approx 38,5 \%$$

ANTWORT: Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 38,5 % bekommt genau einer der 10 Kandidaten keine Mathematik-Frage gestellt.

d)

LÖSUNGSANSATZ 3-MAL-MINDESTENS-AUFGABE

Mit Zufallsvariable Y aus 3c)

$$P(Y \geq 1) > 90 \% = 0,9.$$

UNGLEICHUNG LÖSEN

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$ in die Ungleichung einsetzen:

$$1 - P(Y = 0) > 0,9 \quad | +P(Y = 0) - 0,9$$

NOTIZ
EN

Stochastik I

$$0,1 > P(Y = 0)$$

Dabei ist

$$P(Y = 0) = \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

NOTIZ
EN

Die Ungleichung lautet damit:

$$0,1 > \left(\frac{8}{9}\right)^n \quad | \text{ logarithmieren}$$

$$\ln(0,1) > \ln\left(\left(\frac{8}{9}\right)^n\right) \quad | \text{ Logarithmusgesetz anwenden}$$

$$\ln(0,1) > n \cdot \ln\left(\frac{8}{9}\right) \quad | : \ln\left(\frac{8}{9}\right)$$

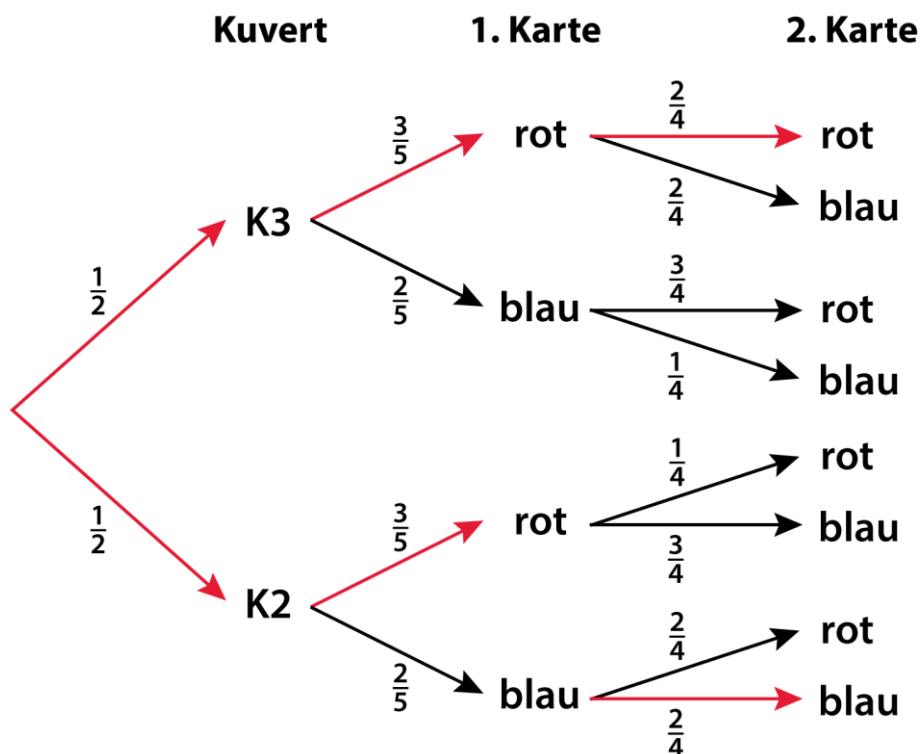
$$\frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{8}{9}\right)} < n \text{ und damit}$$

$$n > \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{8}{9}\right)} \approx 19,55.$$

ANTWORT: Es müssen mindestens 20 Kandidaten teilnehmen.

e)

EINZEL-WAHRSCHEINLICHKEITEN UND BAUM



GEFRAGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

$$\begin{aligned}
 P(\text{"2 rote Karten"}) &= P(\text{"K3 - rot - rot"}) + P(\text{"K2 - rot - rot"}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5} = 0,2.
 \end{aligned}$$

Das entspricht dem angegebenen Ergebnis. □

NOTIZ
EN

NOTIZ
EN

Stochastik I

f)

WAHRSCHEINLICHKEIT MIT VORBEDINGUNG

$$P(rr \cap K3) = P(„K3 – rot – rot“) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,15.$$

Aus Teilaufgabe 3e): $P(rr) = P(„2 rote Karten“) = 0,2.$

bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_{rr}(K3) = \frac{P(rr \cap K3)}{P(rr)} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75 = 75 \%$$

ANTWORT: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % stammen die beiden Karten aus dem Kuvert mit den drei roten Karten.

NOTIZ
EN