Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabengruppe 1, Stochastik

Bayern 2013

Aufgabe 1a

1. SCHRITT: GEGEBENE PARAMETER NOTIEREN

$n = 25$ $p = 0{,}43\ (0{,}37 + 0{,}06)$ $k = 10$

2. SCHRITT: FORMEL ANWENDEN

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$P(X = 10) = \binom{25}{10} \cdot 0{,}43^{10} \cdot 0{,}57^{15} = 0{,}1539$

Aufgabe 1b

1. SCHRITT: GEGEBENE PARAMETER NOTIEREN

$n = 25$ $p = 0{,}35$ $k \geq 13$

2. SCHRITT: MIT DER TABELLE ARBEITEN

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= 1 - P(X \leq k-1) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} B(n; p; i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x \geq 13) &= 1 - P(x \leq 12) \\ &= 1 - 0{,}93956 \\ &= 0{,}06044 \end{aligned}$$

Aufgabe 1c

1. SCHRITT: SPENDERWAHRSCHEINLICHKEIT ERMITTELN

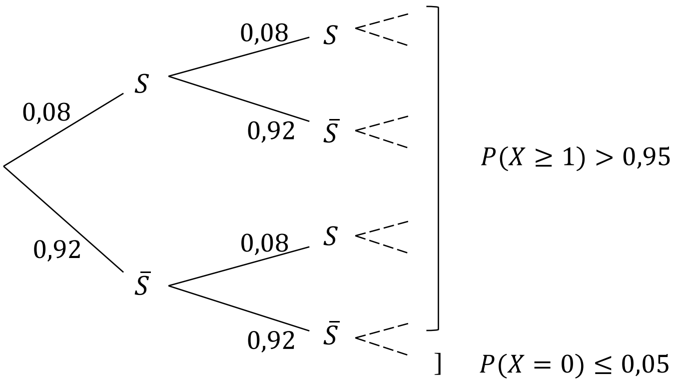
Für einen Empfänger mit der Blutgruppe *B Rh-* sind Personen mit den Blutgruppen *0 Rh-* (6 %) oder *B Rh-* (2 %) mögliche Spender.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Spender die passende Blutgruppe hat, 0,08.

2. SCHRITT: BAUMDIAGRAMM ZEICHNEN

S Spender ist geeignet

$\bar{S}$ Spender ist nicht geeignet



Die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade zusammen, in denen mindestens einmal S vorkommt, soll größer als 0,95 sein. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für den einen Pfad, in dem kein S vorkommt höchstens 0,05 betragen darf.

3. SCHRITT: UNGLEICHUNG AUFSTELLEN UND LÖSEN

$$
\begin{aligned}
0{,}92^n &\leq 0{,}05 \\
\Leftrightarrow ln0{,}92^n &\leq ln0{,}05 \\
\Leftrightarrow n \cdot ln0{,}92 &\leq ln0{,}05 \\
\Leftrightarrow n &\geq \frac{ln0{,}05}{ln0{,}92} \\
n &\geq 35{,}93 \\
n &\geq 36
\end{aligned}
$$

Wenn mindestens 36 Personen Blut spenden, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens eine geeignete Blutgruppe darunter.

Aufgabe 2a

1. SCHRITT: VIERFELDERTAFEL

Die Bedeutung S *oder* T kann man sich anhand einer Vierfeldertafel klar machen.

	T	$\overline{T}$	
S			
$\overline{S}$			

2. SCHRITT: BEDEUTUNG DES EREIGNISSES $S \cup T$

$S \cup T$ bedeutet, eine Stoffwechselstörung liegt vor oder das Testergebnis ist positiv oder beides. In der Vierfeldertafel sind das die gefärbten Flächen:

	T	$\overline{T}$	
S			
$\overline{S}$			

3. SCHRITT: BEDEUTUNG DER NEGATION $\overline{S \cup T}$

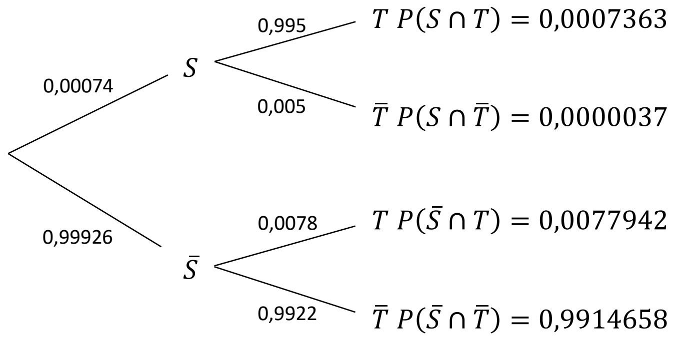
Das Ereignis $\overline{S \cup T}$ ist das Gegenereignis zum Ereignis $S \cup T$. In der Vierfeldertafel ist das das rote Feld $\overline{S} \cap \overline{T}$.

	T	$\overline{T}$	
S			
$\overline{S}$			

In Worten: Es liegt keine Stoffwechselstörung vor und das Testergebnis ist negativ.

Aufgabe 2b

1. SCHRITT: BAUMDIAGRAMM



2. SCHRITT: VIERFELDERTAFEL AUSFÜLLEN

	T	$\bar{T}$	
S	0,0007363	0,0000037	0,00074
$\bar{S}$	0,0077942	0,9914658	0,99926
	0,0085305	0,9914695	1,00000

$P(T) = 0{,}0085305$, das entspricht 0,85305 %

3. SCHRITT: BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT $P_T(S)$ BERECHNEN

$$P_T(S) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)}$$

$$P_T(S) = \frac{0{,}0007363}{0{,}0085305} \approx 0{,}086314$$

4. SCHRITT: INTERPRETATION

Falls das Testergebnis positiv ist, leidet das Kind mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 8,6 % tatsächlich unter einer Stoffwechselstörung.

Aufgabe 2c

1. SCHRITT: TEXT GENAU LESEN

Es gibt einen Unterschied zwischen der Formulierung „.., *bei denen eine Stoffwechselstörung vorliegt,* ***wenn*** *das Testergebnis negativ ist.*“ ($P_{\bar{T}}(S)$) und der Formulierung „.., *bei denen eine Stoffwechselstörung vorliegt* ***und*** *das Testergebnis negativ ist.*“ $P(S \cap \bar{T})$.

2. SCHRITT: ERWARTUNGSWERT BESTIMMEN

Die Wahrscheinlichkeit von $S \cap \bar{T}$ liegt bei 0,0000037. Das heißt, pro Million getesteter Kinder kann man damit rechnen, dass bei durchschnittlich 3,7 Kindern eine Stoffwechselstörung vorliegt und das Testergebnis negativ ist.

Aufgabe 3a

1. SCHRITT: BERECHNE DIE WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR DREIMAL ROT

Beim ersten Zug befinden sich 9 Kugeln in dem Behälter, darunter drei rote. Die Wahrscheinlichkeit für Rot im ersten Zug ist $\frac{3}{9}$.
Wenn Rot gezogen worden ist, gibt es beim zweiten Zug noch 2 rote von insgesamt 8 Kugeln u.s.w..
Die Wahrscheinlichkeit für drei rote Kugeln ist demnach:

$$P(rrr) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$$

2. SCHRITT: GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

Da nicht nur Rot, sondern auch Grün oder Blau gezogen werden kann, muss man die eben berechnete Wahrscheinlichkeit mit 3 multiplizieren.

$$P(G) = 3 \cdot \frac{1}{84} = \frac{1}{28}$$

Aufgabe 3b

1. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITSFUNKTION BESTIMMEN

Die Zufallsgröße X sei der Gewinn aus der Sicht des Spielers und die Variable a der Auszahlungsbetrag. Dann ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

x_i	-2	$a-2$
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{28}$	$\frac{1}{28}$

2. SCHRITT: GLEICHUNG FÜR DEN ERWARTUNGSWERT AUFSTELLEN

Soll langfristig ein Einnahme von 1,25 € pro Spiel erzielt werden, so muss der Erwartungswert des Gewinns -1,25 € betragen.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$$

$$-1{,}25 = (-2)\cdot\frac{27}{28} + (a-2)\cdot\frac{1}{28}$$

3. SCHRITT: GLEICHUNG LÖSEN

$$\begin{aligned} \frac{1}{28}(-56+a) &= -1{,}25 && |\cdot 28 \\ -56+a &= -35 && |+56 \\ a &= 21 \end{aligned}$$

Wenn im Falle eines Gewinns 21,- € ausbezahlt werden, dann kann man langfristig pro Spiel mit einer Einnahme von 1,25 € rechnen.