NOTIZEN

Abitur Mathematik: Musterlösung

Stochastik II

Bayern G8 2012

Aufgabe 1

a)

VIERFELDERTAFEL

$P(\bar{R}) = 88\ \%$ und $P(V) = 18\ \%$ stehen in der Aufgabenstellung.

60 % in der Angabe stehen für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_R(V)$.

$\Longrightarrow P(R \cap V) = P_R(V) \cdot P(R) = 60\ \% \cdot 12\ \% = 7{,}2\ \%$.

Insgesamt ergibt sich somit folgende Vierfeldertafel:

	R	$\bar{R}$	Summe
V	60 % · 12 % = 7,2 %	10,8 %	18 %
$\bar{V}$	4,8 %	77,2 %	82 %
Summe	12 %	88 %	100 %

GESUCHTE WAHRSCHEINLICHKEIT

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, bei der nur Befragte herangezogen werden, die den Roman noch nicht gelesen hatten, also ergibt sich mit den Werten aus der Vierfeldertafel:

$$P_{\bar{R}}(V) = \frac{P(\bar{R} \cap V)}{P(\bar{R})} = \frac{10{,}8\ \%}{88\ \%} \approx 0{,}123 = 12{,}3\ \%$$

ANTWORT

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den Befragten zufällig ausgewählte Person, die laut Umfrage den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts noch nicht gelesen hatte, angab, die Verfilmung gesehen zu haben, beträgt ca. 12,3 %.

NOTIZ
EN

b)

BESCHREIBUNG IM SACHZUSAMMENHANG

$\bar{R} \cup \bar{V}$ = „Eine zufällig ausgewählte Person hat den Roman zum Filmstart noch nicht gelesen oder sie hat den Film nicht gesehen.“

GESUCHTE WAHRSCHEINLICHKEIT

Laut Vierfeldertafel ist:

$P(\bar{R} \cup \bar{V}) = 10{,}8\% + 77{,}2\% + 4{,}8\% = 92{,}8\%$

Aufgabe 2

ANSATZ FÜR DEN SIGNIFIKANZTEST

Treffer = „Befragter Jugendlicher hat den Roman gelesen“
(egal, ob vor oder nach dem Filmstart).

Zufallsvariable X = Anzahl der Treffer

$H_0: p \leq 0{,}15$	Nullhypothese
$n = 100$	Anzahl befragter Personen
$A = \{0; \ldots; k\}$	Annahmenereich
$\bar{A} = \{k+1; \ldots; 100\}$	Ablehnungsbereich
$\alpha = 10\%$	Signifikanzniveau

GRENZE k FÜR ANNAHME-/ABLEHNUNGSBEREICH

Es ist $X \sim B(100; 0{,}15)$.

Ziel: $P(X \in \bar{A}) < 10\%$

$\Leftrightarrow P(X \geq k+1) < 10\%$

$\Leftrightarrow 1 - P(X \leq k) < 10\%$

$\Leftrightarrow P(X \leq k) > 0{,}9$

Nachschlagen im stochastischen Tafelwerk liefert:

$P(X \leq 20) \approx 0{,}934$ (Bedingung erfüllt)

$P(X \leq 19) \approx 0{,}893$ (Bedingung *nicht* erfüllt)

Also ist $k = 20$ der optimale Wert für die geforderten Bedingungen. Der Annahmebereich ist somit $A = \{0; \ldots; 20\}$ und der Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{21; \ldots; 100\}$.

ENTSCHEIDUNGSREGEL

NOTIZEN

„Bei bis zu 20 befragten Jugendlichen, die angeben, den Roman gelesen zu haben, soll davon ausgegangen werden, dass sich ihr Anteil nicht erhöht hat. Bei mehr als 20 soll davon ausgegangen werden, dass sich der Anteil erhöht hat."

NOTIZEN

Aufgabe 3

ANZAHL $(\boldsymbol{\alpha})$

Fünf Personen, die sich zufällig auf acht Plätze verteilen, werden nicht unterschieden. In diesem Fall geht es nur darum, fünf aus acht Plätzen ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.

$\Longrightarrow$ Anzahl Möglichkeiten = $\binom{8}{5} = 56.$

ANZAHL $(\boldsymbol{\beta})$

Jetzt sollen die Personen unterschieden werden. Um 5 Leute auf 5 (vorher zufällig bestimmten) Plätzen zu verteilen, gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten. Daher:

Anzahl Möglichkeiten = $\binom{8}{5} \cdot 5! = 56 \cdot 120 = 6720.$

NICHT GLEICHWAHRSCHEINLICH

Die Ehrengäste wollen vielleicht nebeneinander sitzen. In diesem Fall sind Belegungen mit Lücken zwischen den Personen weniger wahrscheinlich.

Aufgabe 4

a)

ALLGEMEINES

Es geht um unabhängiges Ziehen mit Zurücklegen: Die Schließversuche beeinflussen sich nicht gegenseitig, und wenn man einmal „von Hand" schließen musste, kann dieses Ergebnis wieder eintreten.

$n = 15$ Schließversuche
Treffer = „Vorhang muss von Hand geschlossen werden"
Niete = „Vorhang schließt automatisch"
X = „Anzahl Treffer"
Einzelwahrscheinlichkeit $P(\text{Treffer}) = 0{,}1$ und $P(\text{Niete}) = 0{,}9$.

WAHRSCHEINLICHKEIT VON EREIGNIS *A*

Ereignis A ist ein Pfad einer Bernoulli-Kette der Länge 15:

$P(A) = P(\text{"Vorhang wird null mal von Hand geschlossen"})$
$= P(X = 0)$
$= \binom{15}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{15}$
$\approx 20{,}6\ \%.$

WAHRSCHEINLICHKEIT VON EREIGNIS *B*

Bei Ereignis B soll die ersten vier Male der Vorhang immer automatisch schließen (Null Treffer bei vier Versuchen), bei den folgenden elf Versuchen muss er zweimal von Hand geschlossen werden (d. h. zwei Treffer unter den weiteren elf Versuchen). Wir zerlegen in zwei Bernoulli-Ketten $X_1 \sim B(4; 0{,}1)$ und $X_2 \sim B(11; 0{,}1)$:

$$P(B) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 2) = \left[\binom{4}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4\right] \cdot \left[\binom{11}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^9\right]$$
$$\approx 14{,}0\ \%.$$

b)

PASSENDES URNENMODELL

Die Urne kann z. B. neun schwarze und eine weiße Kugel enthalten. Es muss 15-mal mit Zurücklegen gezogen werden.

Die schwarzen Kugeln stehen dann für Niete = „Vorhang schließt automatisch“, die weiße Kugel für Treffer = „Vorhang muss von Hand geschlossen werden“. Es ist in jedem Zug $P(\text{"schwarz"}) = 0{,}9$ und $P(\text{"weiß"}) = 0{,}1$.

c)

ERWARTUNGSWERT UND STANDARDABWEICHUNG

X ist binomialverteilt, daher:

$E(X) = n \cdot p = 15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx 1{,}16$

GESUCHTE WAHRSCHEINLICHKEIT

$P(\text{"}X \text{ weicht um mehr als } \sigma \text{ von } E(X) \text{ ab"})$

$\approx P(\text{"}X \text{ weicht um mehr als 1,16 von 1,5 ab"})$

$= P(\text{"}X \text{ liegt nicht im Intervall } [1{,}5 - 1{,}16;\ 1{,}5 + 1{,}16]\text{"})$

$= P(\text{"}X \text{ liegt nicht im Intervall } [0{,}34;\ 2{,}66]\text{"})$

NOTIZEN

$= P(X \notin [0{,}34; 2{,}66])$

$= P(X \notin \{1; 2\})$ da X nur ganzzahlige Werte annimmt

$= 1 - P(X = 1) - P(X = 2)$

$= 1 - \binom{15}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{14} - \binom{15}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{13}$ (Bernoulli-Formel)

$\approx 1 - 0{,}343 - 0{,}267 = 39{,}0\ \%$

ANTWORT

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 39,0 % weicht die Anzahl der Treffer um mehr als die Standardabweichung vom Erwartungswert ab.

NOTIZEN