Abitur Mathematik: Musterlösung

Aufgabengruppe 2, Stochastik

Bayern 2013

Aufgabe 1a

1. SCHRITT: RANDWAHRSCHEINLICHKEITEN EINTRAGEN

	K	$\overline{K}$	
J			0,12
$\overline{J}$			0,88
	0,44	0,56	1,00

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT DES FELDES $(J \cap \overline{K})$ BERECHNEN

$0{,}56 : 7 = 0{,}08$

	K	$\overline{K}$	
J		0,08	0,12
$\overline{J}$			0,88
	0,44	0,56	1,00

3. SCHRITT: DIE RESTLICHEN FELDER AUSFÜLLEN

Alle anderen Werte durch Summen- bzw. Differenzenbildung bestimmen. Beispielsweise ergibt sich der Wert für das Feld $(J \cap K)$ aus $0{,}12 - 0{,}08$.

	K	$\overline{K}$	
J	0,04	0,08	0,12
$\overline{J}$	0,40	0,48	0,88
	0,44	0,56	1,00

Aufgabe 1b

1. SCHRITT: VIERFELDERTAFEL

	K	$\overline{K}$	
J	0,04	0,08	0,12
$\overline{J}$	0,40	0,48	0,88
	0,44	0,56	1,00

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN BERECHNEN

$$P_J(\overline{K}) = \frac{P(J \cap \overline{K})}{P(J)} = \frac{0{,}08}{0{,}12} \approx 0{,}67$$

$$P_{\overline{J}}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{J} \cap \overline{K})}{P(\overline{J})} = \frac{0{,}48}{0{,}88} \approx 0{,}\overline{54} < P_J(\overline{K})$$

3. SCHRITT: AUSWERTUNG DER VIERFELDERTAFEL

Der Anteil der Unentschlossenen ist zwar unter den älteren Wählern geringer als unter den Jungwählern, allerdings liegt der Anteil der Unentschlossenen gemessen an der Gesamtzahl der an der Befragung beteiligten Wähler mit 48 % bei den älteren sehr viel höher als bei den Jungwählern mit 8 %.

Aufgabe 1c

1. SCHRITT: PARAMETER NOTIEREN

$n = 48,\qquad p = 0{,}12\qquad k = 6$

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEIT BERECHNEN

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = 6) = \binom{48}{6} \cdot 0{,}12^6 \cdot 0{,}88^{42}$$

$$P(X = 6) = 0{,}1707$$

Aufgabe 2a

1. SCHRITT: NULLHYPOTHESE UND GEGENHYPOTHESE FESTLEGEN

$H_0: p \leq 0{,}5 \qquad H_1: p > 0{,}5$

2. SCHRITT: ANNAHME- UND ABLEHNUNGSBEREICH FÜR H_0 VISUALISIEREN

200 Wähler werden befragt. In den Extremfällen würden sich 0 oder 200 Befragte für den Kandidaten der Partei A entscheiden. Das heißt, die Zahl derjenigen, die sich für den Kandidaten der Partei A entscheiden würden, kann zwischen 0 und 200 liegen.

$$[\underbrace{0;1;2;\,......\,c}_{\text{Annahmebereich}};\underbrace{c+1;\,......\,.199;200}_{\text{Ablehnungsbereich}}]$$

Annahmebereich Ablehnungsbereich
$P(X \leq c) \geq 0{,}95$

Da die Nullhypothese $p \leq 0{,}5$ lautet, ist der linke Bereich der Annahmebereich für H_0. Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist mit 5 % festgelegt, das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass sich höchstens c Befragte für den Kandidaten der Partei A entscheiden würden, soll ≥ 0,95 sein.

3. SCHRITT: PARAMETER C BESTIMMEN

Für $p = 0{,}5$ und $n = 200$ in der Summenspalte den Wert 0,95 oder den nächsthöheren Wert suchen und das dazugehörige k ablesen:

$k = c = 112$

4. SCHRITT: ENTSCHEIDUNGSREGEL AUFSTELLEN

Falls sich bei der Befragung höchstens 112 Wähler für den Kandidaten der Partei A entscheiden würden, wird die Kampagne durchgeführt.

Aufgabe 2b

1. SCHRITT: FEHLER 1. ART

Bei dieser Aufgabe geht es um die Bedeutung des Fehlers 1. Art.
Der Fehler 1. Art besteht darin, dass die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird, obwohl sie in Wirklichkeit zutrifft.
Mit der Wahl des Signifikanzniveaus wird die Wahrscheinlichkeit, diesen Fehler zu begehen, auf ein überschaubares Maß (meist 5 %) reduziert.

(Der Fehler 2. Art: Die Nullhypothese wird aufgrund des Testergebnisses angenommen, obwohl sie in Wirklichkeit nicht zutrifft.)

2. SCHRITT: KONSEQUENZEN AUS DER WAHL DER NULLHYPOTHESE

Das Anliegen der Wahlkampfberaterin ist es, den Kandidaten im ersten Wahlgang durchzubringen. Für sie sind die Kosten wahrscheinlich zweitrangig.
Mit der Wahl der Nullhypothese $p \leq 0{,}5$ hat man das Risiko, die

Kampagne nicht durchzuführen, obwohl sie angebracht wäre, auf höchstens 5 % beschränkt.
Ginge es in erster Linie um die Vermeidung unnötiger Kosten, hätte man wahrscheinlich die Nullhypothese $p \geq 0{,}5$ gewählt. Dann bestünde der Fehler erster Art darin, dass die Kampagne durchgeführt wird, obwohl sie eigentlich nicht nötig wäre. In diesem Fall wäre das Risiko, unnötig Geld auszugeben, auf höchstens 5 % reduziert.

Aufgabe 3a

1. SCHRITT: VARIABLEN FESTLEGEN

Ein Stadtrat kann nicht mehrere Ausschusssitze in einem Ausschuss einnehmen. Das heißt, wir haben das Modell „Ziehen ohne Zurücklegen" und natürlich ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, also hypergeometrische Verteilung.

$$H(N;K;n;x) = \frac{\binom{K}{x}\cdot\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

N: Anzahl der Elemente (in diesem Fall 12 Stadträte)

n: Umfang der Stichprobe (3 Stadträte werden ausgewählt.)

K: Anzahl der Elemente, die eine bestimmte Eigenschaft besitzen ($K = 8$, weil 8 Stadträte weiblich sind.)

x: Anzahl der Elemente mit dieser Eigenschaft innerhalb der Stichprobe (1 bzw. 2)

2. SCHRITT: WAHRSCHEINLICHKEITEN BERECHNEN

$$P(X=1) = \frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{55}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{28}{55}$$

Aufgabe 3b

1. SCHRITT: TABELLE DER WAHRSCHEINLICHKEITSFUNKTION AUFSTELLEN

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$

2. SCHRITT: ERWARTUNGSWERT BERECHNEN

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$

$E(X) = \frac{1}{55}(12 + 2 \cdot 28 + 3 \cdot 14) = 2$

3. SCHRITT: VARIANZ BERECHNEN

Es gibt mehrere Formeln zur Berechnung der Varianz. In diesem Fall ist es günstig, die folgende Formel anzuwenden:

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

${x_i}^2$	0	1	4	9
$P(X = {x_i}^2)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$

$E(X^2) = \frac{1}{55}(12 + 4 \cdot 28 + 9 \cdot 14) = \frac{50}{11}$

$Var(X) = \frac{50}{11} - 4 = \frac{6}{11}$

Aufgabe 3c

1. SCHRITT: ERWARTUNGSWERT VON Y BERECHNEN

Für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt:
$E(Y) = n \cdot p.$

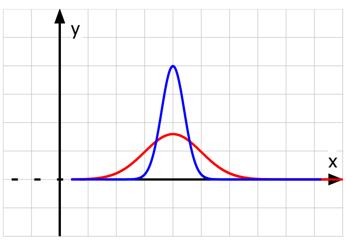
$E(Y) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$

2. SCHRITT: VARIANZ VON Y BERECHNEN

$Var(Y) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

$Var(Y) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > \frac{6}{11}$

3. SCHRITT: DIE ABBILDUNGEN VERGLEICHEN



Die Varianz ist ein Streuungsmaß. Kleine Varianz: Die einzelnen Werte sind relativ dicht um den Erwartungswert konzentriert. Die Skizze zeigt die Verbindungslinien zwischen den Mittelpunkten der oberen Kanten der Balken zweier Binomialverteilungen mit unterschiedlichen Varianzen für große Werte von n. Da der Gesamtflächeninhalt der einzelnen Balken immer eins ist, ist die Kurve mit der kleineren Varianz höher und schmaler, als die Kurve mit der größeren Varianz.
Der Vergleich von Abb. 1 und 2 zeigt du, dass der Balken für den

Erwartungswert in Abb. 1 höher ist als in Abb. 2. Da für beide Wahrscheinlichkeitsverteilungen $n = 3$ gilt, genügt es, die Hochpunkte zu vergleichen, um zu erkennen, dass $Var(X)$ kleiner sein muss als $Var(Y)$.